

GUÍA DE CONOCIMIENTOS

Representación algebraica y gráfica de relaciones



GUÍA DE CONOCIMIENTOS.

Propósito del módulo

Utilizar los sistemas coordenados de representación por medio de la ubicación de funciones algebraicas en el plano, a través de estrategias sobre el tratamiento de los lugares geométricos, para incorporar métodos analíticos en la resolución de problemas geométricos.

Unidad de aprendizaje 1

Aplicación de los sistemas de coordenadas rectangulares.

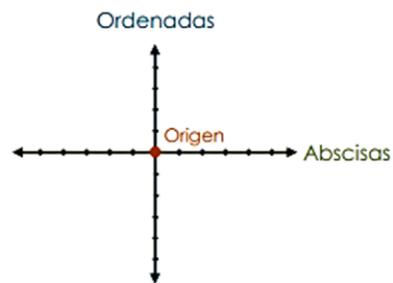
Resultado de aprendizaje 1.1

Representa la solución de problemas geométricos mediante el análisis de las variables.

Plano Cartesiano

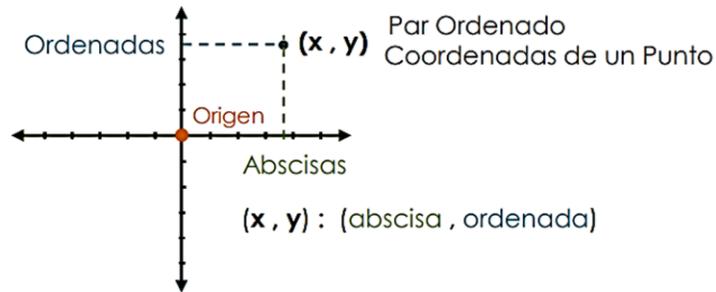
Es un sistema de referencia constituido por una recta horizontal (eje x o eje de las abscisas) y otro vertical (eje y o eje de las ordenadas).

Al punto de intersección entre las rectas se le llama **origen** de coordenadas.



Par ordenado

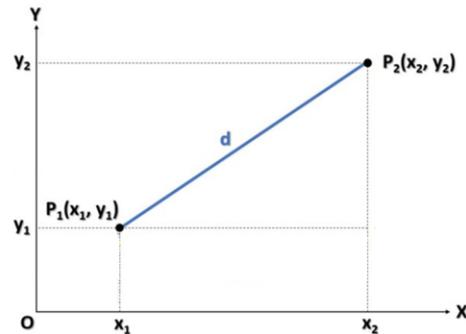
Se denomina a las coordenadas de un punto y se representa (x, y) . El primer valor corresponde a la abscisa y la segunda corresponde a la ordenada.



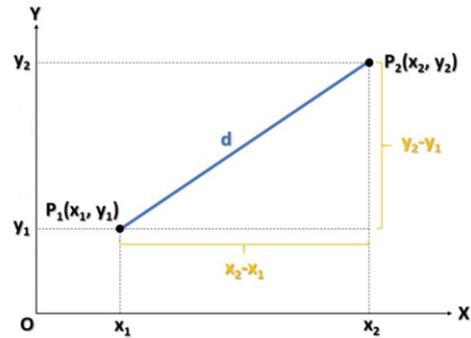
Distancia entre dos puntos en el plano

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se define la distancia entre dos puntos como:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Demostración



Punto medio

Calcular el punto medio entre los siguientes puntos. (puedes hacerlo en tu cuaderno o en este archivo impreso)

1. $A(-4,8)$ y $B(6,8)$
2. $C(2,-3)$ y $D(4,2)$
3. $E(7,0)$ y $F(0,4)$
1. $G(-5,2)$ y $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
2. $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $J\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}\right)$
3. $K\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Ejercicio 1

Para cada ejercicio determine las coordenadas que faltan y realice su representación gráfica.

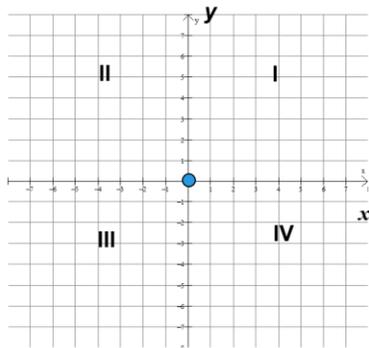
- Los extremos de un segmento rectilíneo son P1 (3, 7) y P2 (-5, 2). Encuentre las coordenadas del punto medio y la distancia entre ellos.
- El extremo superior de un segmento se ubica en P1 (2, 1), su punto medio es PM (0, 1), ¿Cuáles son las coordenadas del punto extremo inferior P2 (x2, y2)? y ¿Qué distancia existe entre los tres puntos?
- Calcule los puntos medios de los lados de un triángulo, con vértices en las coordenadas: P1(3,0), P2 (0,4) y P3 (-3, 0). Determine el perímetro y el área del triángulo. (Se sugiere utilizar la fórmula de Herón para calcular el área $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)

Resultado de aprendizaje 1.2

Traza en un plano los puntos, ejes y cuadrantes mediante las coordenadas de los lugares geométricos en los diferentes contextos en los que se desarrolla.

PLANO CARTESIANO

Así como a cada punto de una recta se le puede asignar un número real, a cada punto del plano se le puede asignar una pareja ordenada de la siguiente manera:



Se ubican dos rectas numéricas que sean perpendiculares y se corten en el punto cero.

El punto de corte se llama **origen**

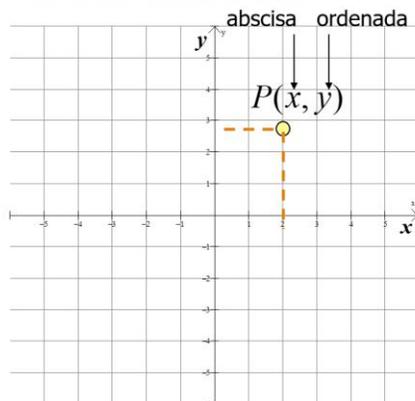
La recta horizontal se llama *eje x* y la recta vertical se llama *eje y*

Los ejes x y y dividen al plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes**.

3 3

PLANO CARTESIANO

Los puntos en el plano cartesiano son **pares ordenados** de números reales (x, y)



Llamamos a x la abscisa, y a y la ordenada.

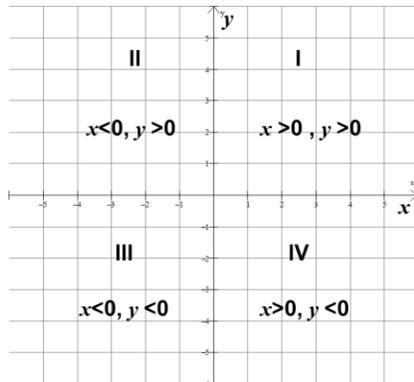
OJO!!

$(x, y) \neq (y, x)$. Excepto en el caso en que $x = y$

NOTA: Para indicar que un punto (x, y) es un punto del plano cartesiano podemos escribir:

4 4

PLANO CARTESIANO



En el cuadrante **I** x y y son positivos.

En el cuadrante **II** x es negativo y y es positivo.

En el cuadrante **III** x y y son negativos.

En el cuadrante **IV** x es positivo y y es negativo.

OJO!! Los puntos sobre los ejes de coordenadas **no** se consideran parte de ningún cuadrante

5 5

UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

Ejemplos

Ubicar en el plano cartesiano

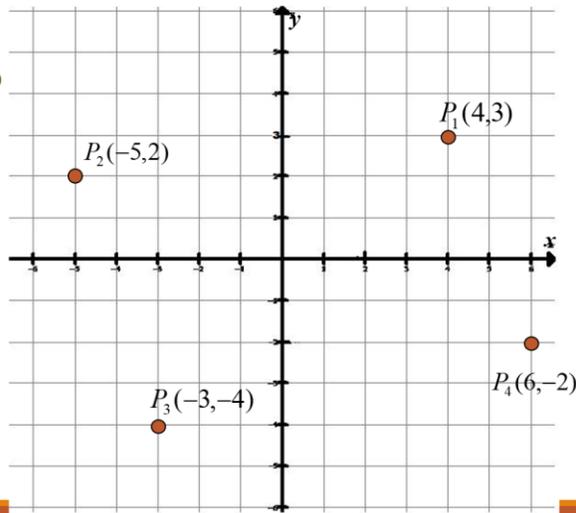
$$P_1(4,3)$$

$$P_2(-5,2)$$

$$P_3(-3,-4)$$

$$P_4(6,-2)$$

$$P_5(2,0)$$



6 6

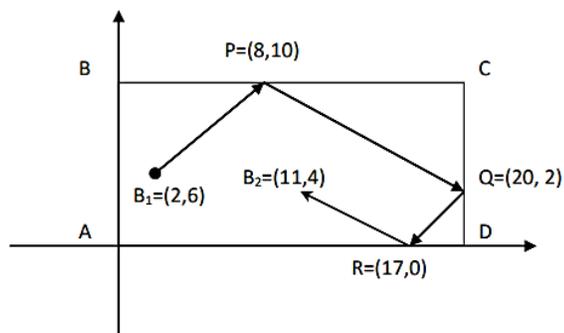
Ejercicio 2

Para cada ejercicio determine las coordenadas que faltan y realice su representación gráfica.

Realiza las siguientes actividades:

I.- Si para bosquejar la ubicación de ciudades y poblados del estado de Aguascalientes, se coloca al eje X paralelo al ecuador, y de tal modo que la ciudad de Aguascalientes (A) sea el punto $(-5,-9)$, entonces Rincón de Romos (R) es el punto $(-5,5)$ y Tepezalá (T) es el punto $(0,5)$. Haz una representación gráfica de esta situación y calcula cuanto mide el segmento AT. Después, tomando en cuenta que la distancia real entre Aguascalientes y Tepezalá es de 45 km, indica cuál es la distancia real entre Rincón de Romos y Aguascalientes.

II.- El rectángulo ABCD es una mesa de billar. Los ejes se colocaron de tal forma que coinciden con dos orillas de la mesa. Las flechas indican la trayectoria que siguió una bola que se encontraba en el punto B_1 para tocar a una segunda bola que se encontraba en el punto B_2 . En ella, aparentemente, los tramos B_1P y QR son paralelos entre sí, y lo mismo sucede con los tramos PQ y RB_2 . Sin embargo, esto puede ser sólo una ilusión óptica y tal vez en la trayectoria no hay tramos paralelos.



3. Cuando una bola de billar es golpeada sin efecto, cada vez que golpea a una orilla de la mesa, el ángulo de "llegada" es el mismo que el ángulo de "salida". Entonces para el diagrama de la mesa de billar, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?
 - a) La bola B_1 fue golpeada con efecto. El ángulo de llegada a P es mayor que el ángulo de salida de este punto.
 - b) La bola B_1 fue golpeada con efecto. El ángulo de llegada a P es menor que el ángulo de salida de este punto.
 - c) La bola B_1 no fue golpeada con efecto. El ángulo de llegada a P es igual al ángulo de salida de este punto.
 - d) La bola B_1 no fue golpeada con efecto. $B_1P \perp PQ$

4. ¿Cuál es la trayectoria que deberá seguir una bola si se desea que pase por el punto medio de PQ y que sea perpendicular a él, es decir, cuál es la ecuación de la recta que deberá seguir como trayectoria?

Resultado de aprendizaje 1.3

Establece las relaciones algebraicas entre diferentes lugares geométricos.

Ejercicio 3

Nombre del Alumno:

Unidad de Aprendizaje:

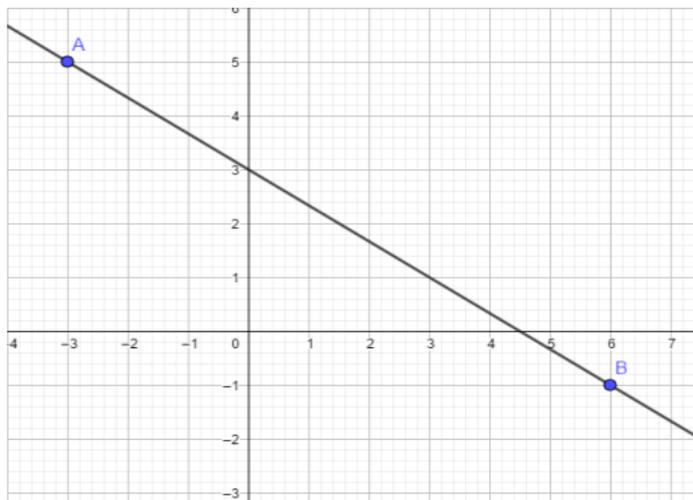
1. Aplicación de los sistemas de coordenadas rectangulares.

Resultado de Aprendizaje:

1.3 Establecer relaciones algebraicas entre diferentes lugares geométricos

Actividad. Núm. 3.

Encontrar las relaciones algebraicas de los lugares geométricos



1. Observar la siguiente gráfica y escriba los datos que se piden:

Abcisa del punto A (x_A): _____

Ordenada del punto A (y_A): _____

Abcisa del punto B (x_B): _____

Ordenada del punto B (y_B): _____

Abcisa al origen (a): _____

Ordenada al origen (b): _____

Distancia entre los puntos A y B: _____

$x_B - x_A$: _____

$y_B - y_A$: _____

Pendiente de la recta $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Representación algebraica
de la recta:

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad \underline{\hspace{10em}}$$

$$y = m x + b \quad \underline{\hspace{10em}}$$

2. Localizar tres puntos en plano, con las coordenadas que se presentan a continuación: A (-2.5, 2), B (-2,2) y C (5, 2) y realiza los siguientes cálculos:

a) Punto medio (P_M) entre B y C:

$$P_M(h, k) = P_M (\quad , \quad)$$

b) Distancia entre B y P_M (llamada c)

c) Distancia entre A y P_M (llamada a)

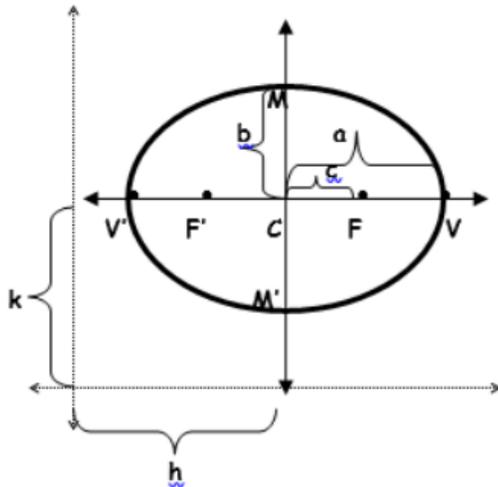
d) Calcula $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

e) $LR = \frac{2b^2}{a}$

f) Escribe la representación algebraica de la curva obtenida:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

g) Realice la representación gráfica del lugar geométrico :



3. Localizar los puntos: A (4,2) y B (7,5) en el plano cartesiano y realice los cálculos que se piden:

a) Renombre las coordenadas del punto A como "h" y "k" h = _____ k = _____

b) Calcule la distancia entre los puntos A y B, renómbrela como "r". r = _____

c) Escriba la ecuación de la curva encontrada: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

d) Represente la curva en el plano cartesiano.

Unidad de aprendizaje 2

Aplicación de los sistemas de coordenadas rectangulares.

Resultado de aprendizaje 2.1

Representa la solución de problemas geométricos mediante el análisis de las variables.

UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

Ejemplos

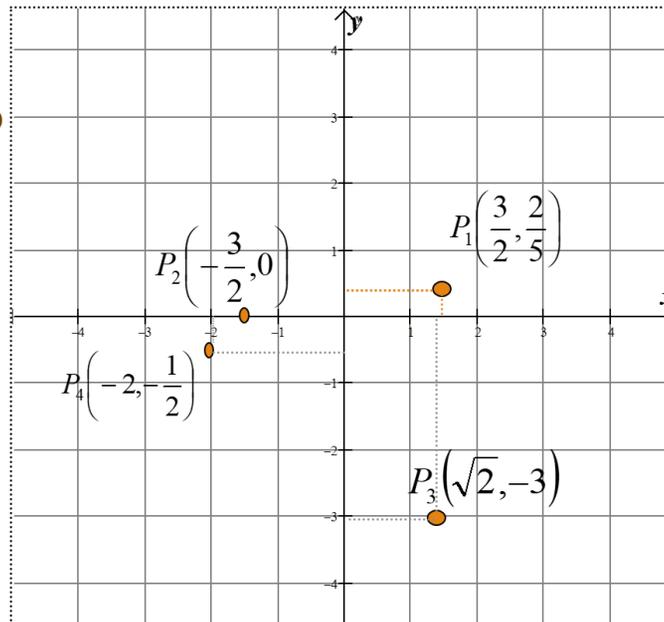
Ubicar en el plano cartesiano

$$P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right)$$

$$P_2\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$P_3(\sqrt{2}, -3)$$

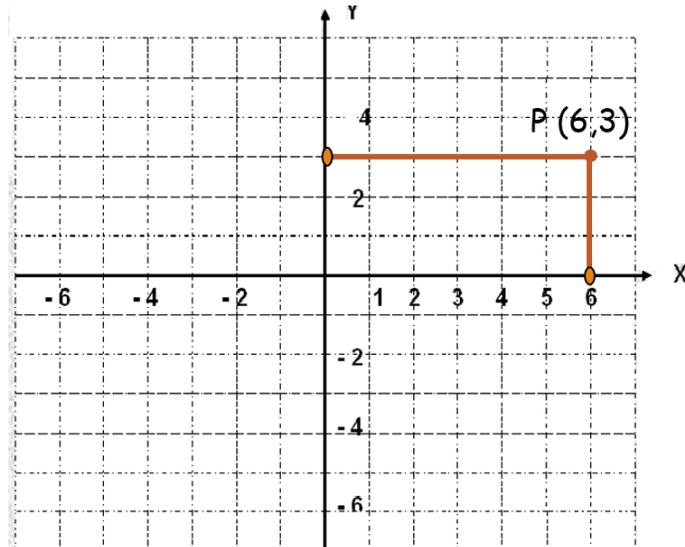
$$P_4\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$$



EXPRESIONES VERBALES

Ejemplo 1

Ubicar en el plano un punto de coordenadas (x, y) cuya abscisa es 6 y su ordenada es la mitad de la abscisa.



$$x = 6$$

$$y = \frac{x}{2}$$

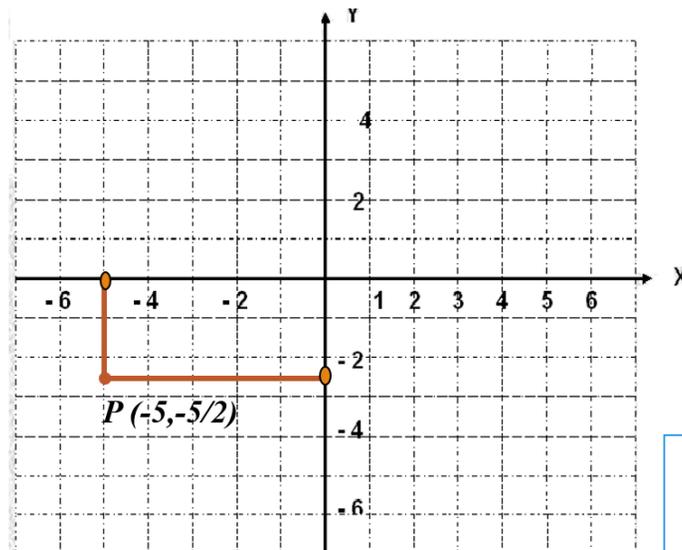
$$y = 3$$

Entonces el punto es $(6,3)$

EXPRESIONES VERBALES

Ejemplo 2

Ubicar en el plano un punto de coordenadas (x, y) cuya ordenada es $-5/2$ y la abscisa es dos veces la ordenada.



$$y = -5/2$$

$$x = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right)$$

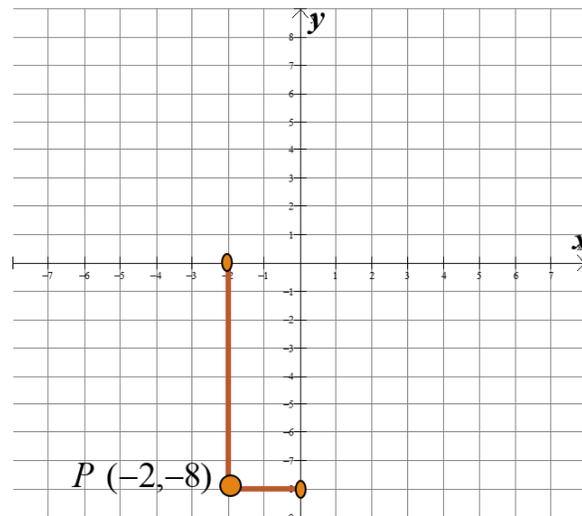
$$x = -5$$

Entonces el punto es
 $(-5, -5/2)$

EXPRESIONES VERBALES

Ejemplo 3

Ubicar en el plano un punto de coordenadas (x, y) que cumple con la condición de que su ordenada es igual a -8 y su abscisa es la raíz cúbica de la ordenada.



$$y = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8}$$

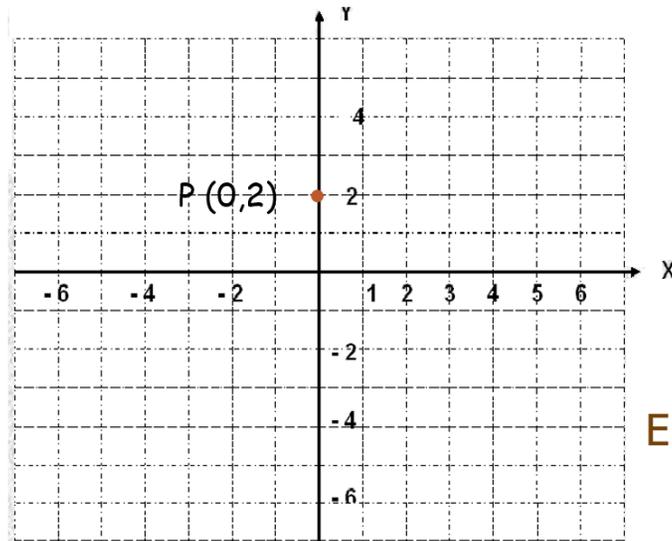
$$x = -2$$

El punto es entonces $P(-2, -8)$

EXPRESIONES VERBALES

Ejemplo 4

Ubicar en el plano un punto de coordenadas (x, y) cuya :
abscisa tenga como valor el doble producto de la ordenada,
menos 4 unidades y su ordenada sea 2.



$$y = 2$$

$$x = 2y - 4$$

$$x = 2(2) - 4$$

$$x = 0$$

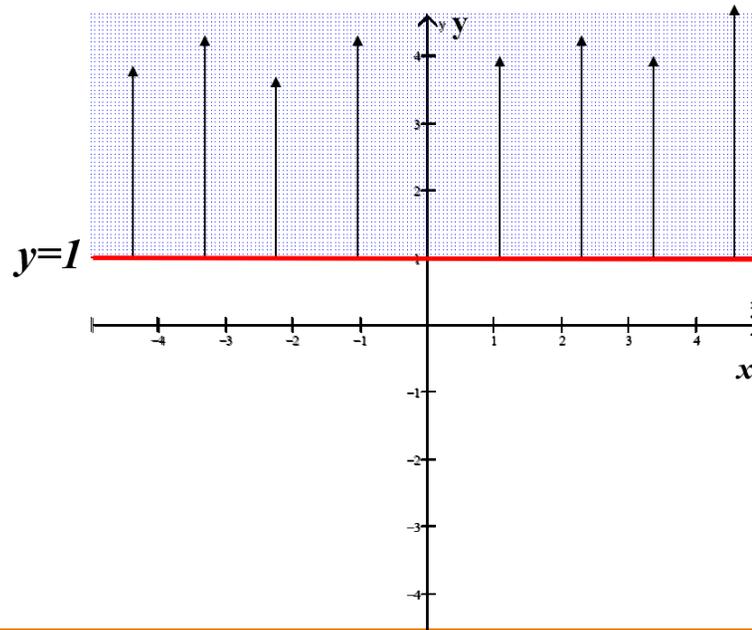
El punto es entonces P (0,2)

GRÁFICAS DE REGIONES EN EL PLANO

Ejemplo 5

Encuentre el siguiente conjunto de puntos en el plano

cartesiano $\{(x, y) \mid y \geq 1; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$



$$y > 1$$

$$y \geq 1$$

Ejercicio

Para realizar esta actividad se necesita:

- Una barra de plastilina.
- Un cúter o regla plástica.
- Dos hojas blancas.
- Un plumón de punta fina.
- Un bolígrafo

Instrucciones:

- Amase la plastilina sobre una de las hojas blancas hasta que esté suave.
- Forme un cono con toda la barra de plastilina.
- Realice un corte horizontal al cono.
- Separe las partes y coloque una de ellas, por el lado del corte, sobre una hoja limpia.
- Marque el contorno del corte sobre la hoja, identifique la curva resultante y escriba una breve descripción de cómo se obtuvo la curva.
- Vuelva a armar el cono.
- Realice un corte en diagonal, cuidando de no cortar la base del cono.
- Repita los pasos del cuatro al seis.

- Realice un corte en diagonal, cortando la base del cono.
- Repita los pasos del cuatro al seis, dibujando el contorno sin la base.
- Realice un corte en vertical, desde la punta del cono hasta la base, haga la unión de ambas partes por la punta y dibuje el contorno sin la base.

Resultado de aprendizaje 2.2

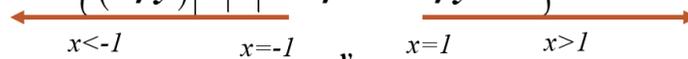
Interpreta las relaciones algebraicas de los cortes con los elementos y ecuaciones que integran un cono.

GRÁFICAS DE REGIONES EN EL PLANO

Ejemplo 6

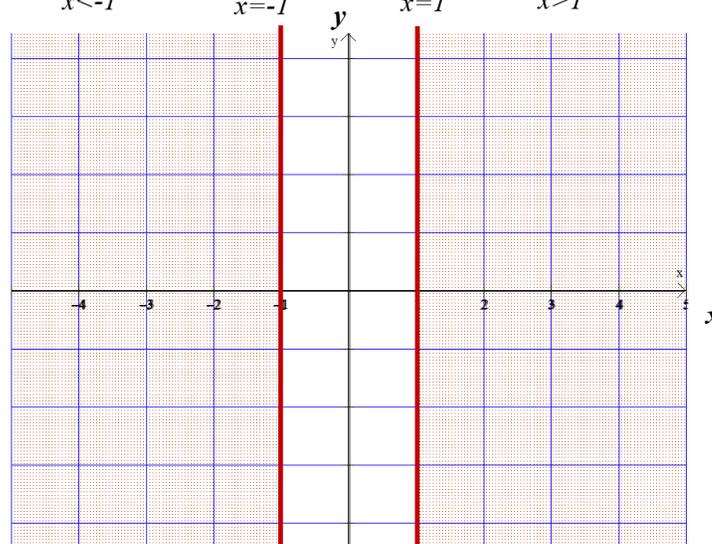
Encuentre el siguiente conjunto de puntos del plano cartesiano.

$$\{(x, y) \mid |x| \geq 1; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$



Recuerde...

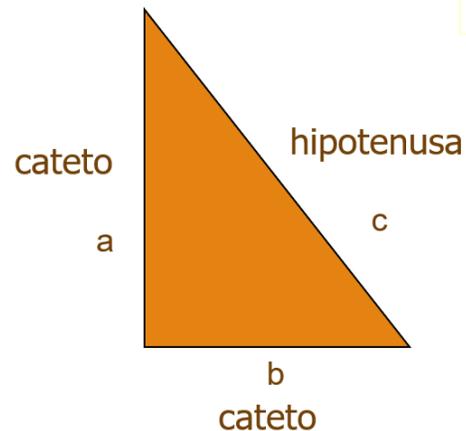
$$|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ó } x \geq 1$$



TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

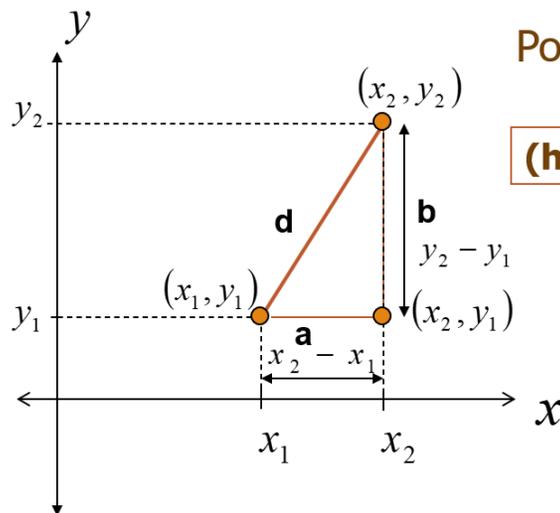


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Nota: observe que la hipotenusa es el lado más largo del triángulo.

Distancia entre dos puntos

Tomemos dos puntos del plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y hallemos la distancia entre ellos:



Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$\text{(hipotenusa)}^2 = \text{(cateto)}^2 + \text{(cateto)}^2$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

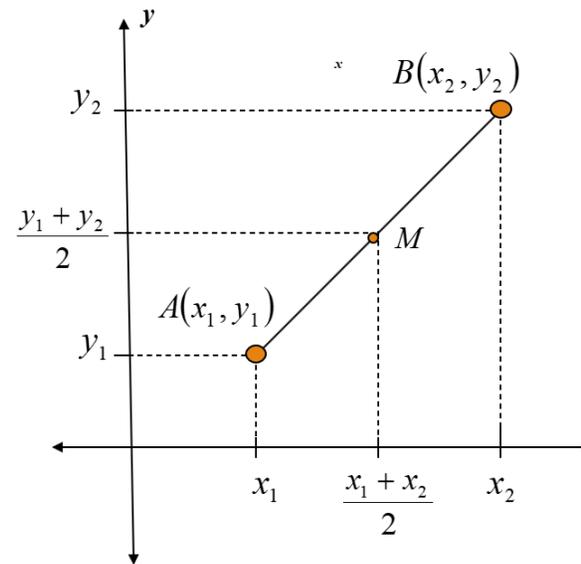
Entonces,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

LA FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

El punto medio M de un segmento de recta $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$, está definido como: _____

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Ejemplo 8

Hallar la distancia y el punto medio entre los puntos $P(-3,2)$ y $Q(1,5)$.

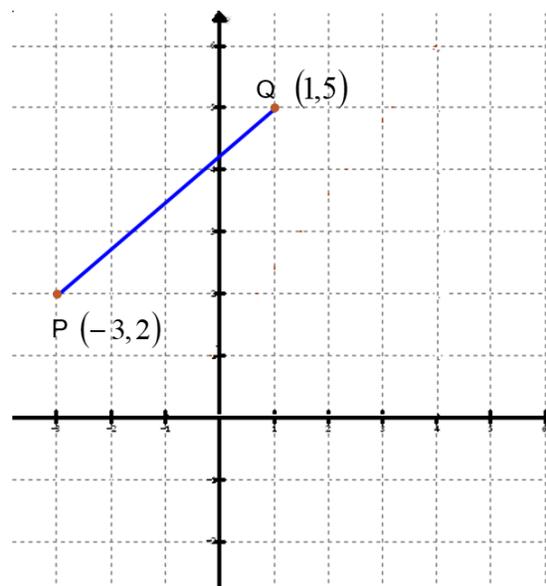
Solución

Aplicando la fórmula de distancia se tiene:

$$d(PQ) = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (5 - 2)^2} = 5$$

Aplicando la fórmula de punto medio se tiene:

$$M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(-1, \frac{7}{2}\right)$$



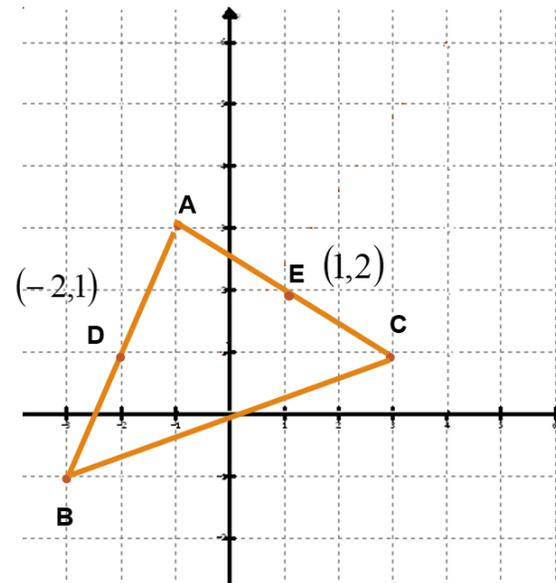
EJEMPLO 9

1. Dibujar un triángulo ABC con vértices A(-1,3), B(-3 , -1), C(3 , 1).

2. Hallar los puntos medios D y E de los lados AB y AC respectivamente

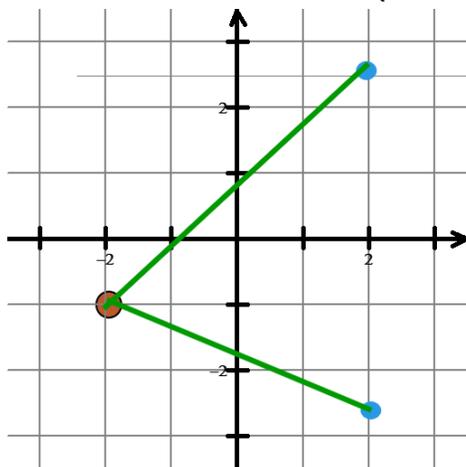
$$D = \left(\frac{-1+(-3)}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right) = (-2,1)$$

$$E = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (1,2)$$



EJEMPLO 10

Encontrar todos los puntos cuya abscisa sea 2 y que la distancia al punto $(-2, -1)$ sea de unidades 7



Los puntos de abscisa 2 son

Los cuales son de la forma $(2, y)$

El punto $(-2, -1)$

Cuales tendrán una distancia de 7 unidades entre ellos?

Se observa que debe haber dos posibilidades

$(2, y_1)$ $(2, y_2)$

¿Como determinar sus coordenadas con exactitud?

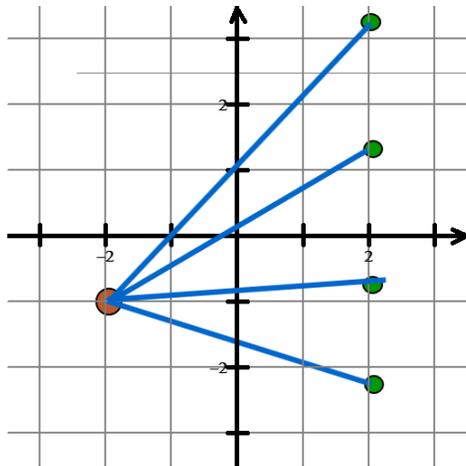
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Rightarrow 7 = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-1 - y)^2} \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{33}$$

$$(2, -1 + \sqrt{33}) \text{ y } (2, -1 - \sqrt{33})$$

EJEMPLO 10

Encontrar todos los puntos cuya abscisa sea 2 y que la distancia al punto $(-2, -1)$ sea de unidades 7



Los puntos de abscisa 2 son

Los cuales son de la forma $(2, y)$

El punto $(-2, -1)$

Cuales tendrán una distancia de 7 unidades entre ellos?

Se observa que debe haber dos posibilidades

Nombre del Alumno:

Unidad de Aprendizaje:

2 Integración de los lugares geométricos generados a partir de un cono.

Resultado de Aprendizaje:

2.2. Interpreta las relaciones algebraicas de los cortes con los elementos y ecuaciones que integran un cono.

Actividad. Núm. 5.

Analiza los elementos y la estructura de la ecuación general de segundo grado para la circunferencia

Realizar las siguientes actividades:

- 1.- Encuentre la ecuación de una circunferencia de radio 4 y centro en (3, -2).
- 2.- Cambie la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 80 = 0$ a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.
- 3.- ¿Cuál es la gráfica, si existe, de la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$? Realícelo analíticamente, justificando su respuesta, y compruébelo con alguna aplicación digital.
- 4.- Considere los puntos P(1, -2), Q(5, 4) y R(10, 5)
 - a) Grafique los puntos y trace la circunferencia que pasa por ellos con ayuda usando algún graficador o aplicación matemática.
 - b) Localice su centro. Compruebe que los puntos P, Q y R equidistan de él.
 - c) Encuentre la ecuación de la circunferencia correspondiente.
- 5.- Una circunferencia es tangente a la recta $2x - y + 1 = 0$ en el punto (2, 5) y su centro se encuentra sobre la recta $x + y = 9$. Encuentre la ecuación de la circunferencia. Para ello utilice algún programa informático y establezca las relaciones posibles que conduzcan a su solución.
- 6.- Un triángulo tiene sus lados sobre las rectas $x + 2y - 5 = 0$, $2x - y - 10 = 0$ y $2x + y + 2 = 0$. Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo. Para ello lleve a cabo las siguientes acciones con ayuda de alguna aplicación informática:
 - a) Con ayuda de un graficador trace las rectas correspondientes.
 - b) Encuentre los puntos donde se intersectan.
 - c) Construya las bisectrices del triángulo y halle su incentro (recuerde las propiedades del incentro de un triángulo).
 - d) Encuentre la distancia del incentro a un lado del triángulo.
 - e) Encuentre la ecuación de la circunferencia correspondiente.

Nombre del Alumno: _____

Unidad de Aprendizaje:

2 Integración de los lugares geométricos generados a partir de un cono.

Resultado de Aprendizaje:

2.2. Interpreta las relaciones algebraicas de los cortes con los elementos y ecuaciones que integran un cono.

Actividad. Núm. 6

Analiza los elementos y la estructura de la ecuación general de segundo grado para la circunferencia

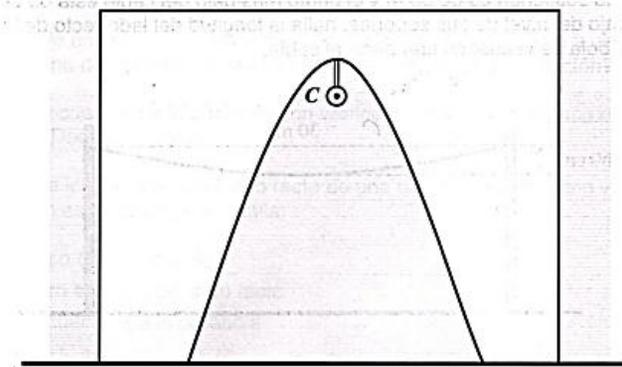
Realizar las siguientes actividades:

- 1.- Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen y su foco en el punto F (1,0).
- 2.- Calcula la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen y la ecuación de su directriz es: $y + 1/4 = 0$.
- 3.- Una parábola vertical tiene su vértice en el origen y pasa por el punto P (4,2). Encuentra su ecuación.
- 4.- Encuentra la ecuación de la parábola que es horizontal, tiene su vértice en el origen y pasa por el punto P (-1,3).
- 5.- Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación: $x^2 = 16y$
- 6.- Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación: $y^2 = -12x$
- 7.- Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación: $(x + 1)^2 = 8(y - 1)$
- 8.- Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación: $(y + 2)^2 = 6(x + 3)$
- 9.- Escribe la ecuación de la parábola: $(x + 3)^2 = 7(y - 1)$ en su forma general.
- 10.- Calcula la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto V (2,3) y su foco está en F (1,3).
- 11.- Calcula la ecuación de la parábola en su forma general que tiene su vértice en el punto V (-2,-1) y que pasa por el punto P (2,-5).

12.- Calcula la ecuación en forma general y los sus elementos de la parábola vertical que tiene su foco en el punto $F(2,1)$ y su directriz es la recta:

$y + 1 = 0$. Finalmente, grafica la parábola y verifica si pasa por el punto $P(-2,4)$.

13.- Una casa antigua tiene un arco en forma de parábola que tiene una base de 3 m y su punto más alto está a 4 m del suelo. Si desde este punto cuelga una lámpara cuyo centro C coincide con el foco del arco, ¿a qué altura está C ?



14.- La sección de la cubierta de un tragaluz tiene la forma de un arco de parábola. Si su base de 1.6 m coincide con el lado recto de la parábola, ¿cuál es la altura máxima de la cubierta del tragaluz?

Nombre del Alumno:

Unidad de Aprendizaje:

2 Integración de los lugares geométricos generados a partir de un cono.

Resultado de Aprendizaje:

2.2. Interpreta las relaciones algebraicas de los cortes con los elementos y ecuaciones que integran un cono.

Actividad. Núm. 8.

Analiza los elementos y la estructura de la ecuación general de segundo grado para la parábola

Realizar las siguientes actividades:

1. Grafica la hipérbola $36x^2 - 64y^2 = 2304$. Localiza sus elementos.
2. Dibuje la gráfica de la hipérbola $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$. Localiza sus elementos.
3. En los ejercicios siguientes reduzca cada ecuación a la forma ordinaria. Después encuentre las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos. Dibuje las asíntotas y esboce la gráfica de la ecuación:
 - a) $3x^2 - 2y^2 + 4y - 26 = 0$
 - b) $9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y - 16 = 0$
 - c) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$
 - d) $4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x - 81 = 0$
4. Encuentre la ecuación de la trayectoria de un punto que se mueve de modo tal que su distancia a $(5,0)$ es $5/4$ de su distancia a la recta $x = 16/5$. Identifique la curva y encuentre sus elementos.
5. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos $(5,0)$ y $(-5,0)$, es siempre igual a 8 unidades. Identifique el lugar geométrico y encuentre sus elementos.
6. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$, y sus focos los puntos $(0, 5)$ y $(0, -5)$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transversos y conjugados, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.