# REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Félix Eduardo Guerrero Castro

www.anglo-digital.com
Anglo Digital SA de CV
Anglo DigitalMx

# REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE **FUNCIONES**

Tercer Semestre


Paseo del Faisán No. 50, Col. Lomas Verdes, 1a. Sección,
C.P. 53120, Naucalpan, Edo. de México.

Edición 2017

ISBN 978-607-615-415-1



Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.
Registro No. 3650

Miembro de la Cámara Nacional de Comercio de la Ciudad de México.
Registro No. 13405

Impreso en México/Printed in Mexico

Dirección editorial: Víctor Ricardo Guzmán Zúñiga
Dirección de desarrollo digital: Víctor Fernel Guzmán Arvizu
Dirección de desarrollo editorial: Alberto García Rodríguez
Coordinación editorial: Carmen Sánchez Crespo
Edición: Carmen Sánchez Crespo, Cynthia Patricia Rodríguez Zepeda y Beatriz Angélica Jiménez Gallegos
Corrección de estilo: Alejandro Estrada
Redacción de las secciones “Cultura para la Paz” y “Cultura Financiera y para el Consumo”: Samantha Ríos Hernández
Diseño de portada: Marisol Rivas
Diagramación: René Piedra Tenorio
Imágenes: Shutterstock,123RF

Se terminó la impresión de esta obra en



Informes:

Anglopublishing

Telefonos: (55) 5343-2542
(771)167-5087

# Presentación

El presente libro, *Representación gráfica de funciones,* ha sido diseñado de acuerdo con el **Modelo Académico de Calidad para la Competitividad del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (Conalep)**, con la finalidad de orientar el aprendizaje de los alumnos, encauzar sus acciones y reflexiones y proporcionar situaciones o **experiencias de aprendizaje** en las que desarrollan competencias y sus atributos (entendiendo éstas como la combinación integrada de conocimientos, habilidades, actitudes y valores), que les permitan movilizar, de forma integral, recursos que se consideran indispensables para saber resolver problemas de manera autónoma, flexible y responsable en diversas situaciones o contextos.

Las **actividades en secuencia didáctica por competencias y atributos** que se trabajan en el libro son suficientes para cubrir el 100% de los temas vistos en el programa de estudios, y ponen énfasis en lo que los alumnos tienen que aprender, en las formas en cómo lo hacen y en la aplicación y transferencia de los conocimientos a situaciones de la vida real; ello exige a los estudiantes relacionar, integrar, interpretar, inventar, aplicar y transferir los saberes a la resolución de problemas.

El libro también contiene la sección **"Recapitulación"**, indicada en los programas de estudios Conalep, que sirve a los alumnos para valorar los aprendizajes esperados y aplicar una evaluación parcial, antes de realizar cada una de las **"Actividades de evaluación"** con valor en la calificación, incluidas al 100% en el libro.

Parte sustancial del sistema Conalep es la metodología de su evaluación, cuya finalidad diagnóstica, formativa y sumativa se concreta en los diversos instrumentos de evaluación que contiene este libro: **Evaluación diagnóstica**, **Autoevaluación**, **Coevaluación** y **Heteroevaluación**, además de pruebas tipo Planea, que permitirán a los alumnos prepararse para la aplicación de las pruebas **Planea y Pisa** que realizarán en su último grado escolar.

Como complemento, se integran al libro cápsulas informativas de datos interesantes relacionados con el tema; recomendaciones de **tecnologías de la información y la comunicación**, como páginas web, videos, música, podcast, películas, libros, etc.; actividades y frases que motivan a los alumnos a mejorar y evitar la deserción escolar y fortalecen el **Programa No Abandono**, así como actividades complementarias para el desarrollo de **aprendizajes para la vida**, en los ejes transversales de **"Cultura para la Paz"** y **"Cultura financiera"**.

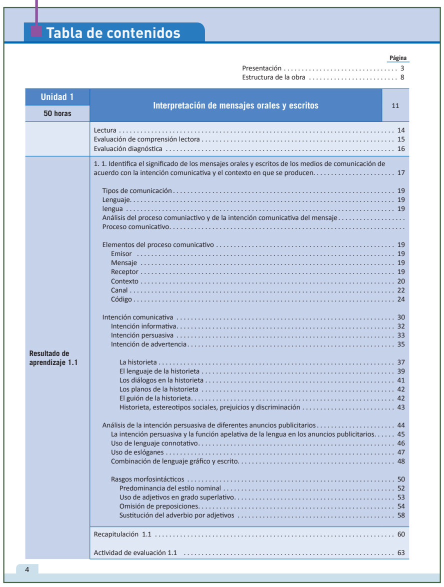
Esperamos que, tanto a profesores como a los alumnos, este libro les sea de utilidad en la transmisión del conocimiento y la comprensión del aprendizaje.

**Víctor Guzmán Zúñiga**
**Dirección Editorial**

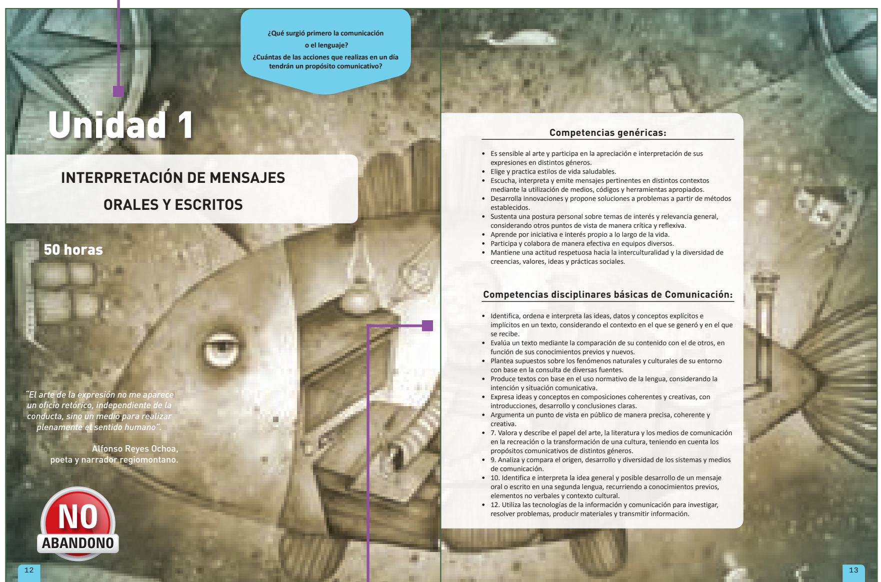
# Tabla de contenidos

# Estructura de la obra

**Tabla de contenidos**
Presenta, por medio de cuadros, la organización del contenido de cada unidad del módulo: tema, tiempo asignado, resultados de aprendizaje, subtemas, recapitulación, actividades de evaluación oficiales e instrumentos de evaluación.



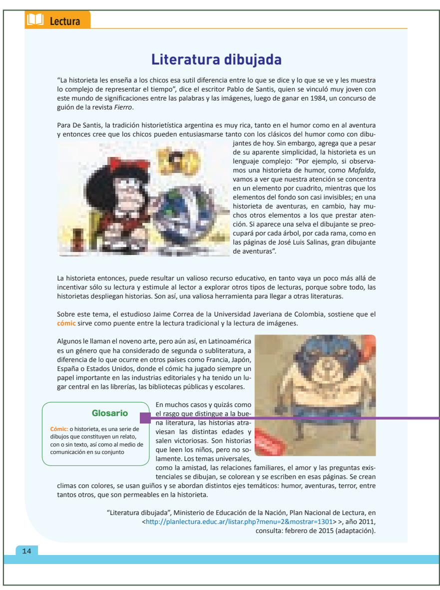

**Inicio de unidad**
En cada inicio de unidad se presenta una imagen distintiva de la misma; el número identificador, título; una frase relacionada con el contenido que invita a la reflexión, así como preguntas de introducción que sirven para detonar los conocimientos previos con que cuentan los alumnos.




**Competencias genéricas y disciplinares**
Al inicio de cada unidad se presentan todas las que se trabajaron a lo largo de ésta tanto en actividades formativas como de evalución.

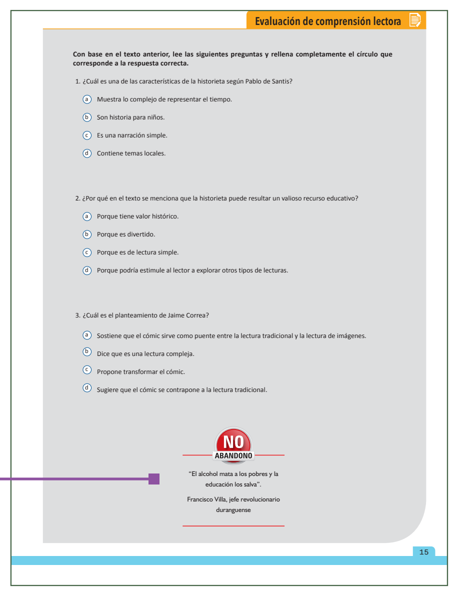
**Lectura**
Su finalidad es acercar al estudiante al contenido del tema que aprenderá mediante un texto literario para crear un puente de conexión entre ambas disciplinas; con este motivo, se localiza al inicio de cada unidad.

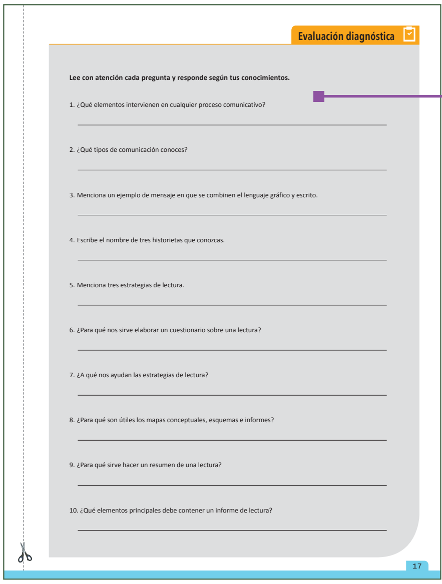
**Evaluación de comprensión lectora**
Es la primera actividad de cada unidad. Sirve para verificar lo que los alumnos comprendieron de la lectura que hicieron en la página anterior.




**Glosario**
Esta sección ayuda al alumno a conocer el significado de palabras que no son de su dominio.

**No abandono**
Esta cápsula invita a realizar una reflexión o actividad acerca de la importancia de ser constantes y perseverantes en los estudios.

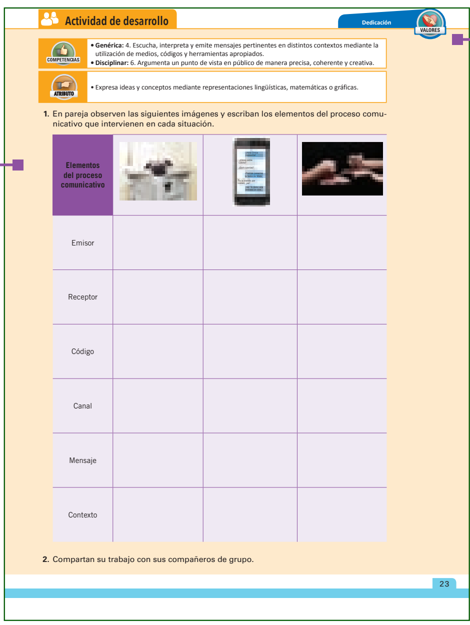





**Evaluación diagnóstica**
Permite al profesor identificar si los alumnos cuentan con los conocimientos básicos necesarios para iniciar los temas de la unidad.

**TIC**
Recomendaciones de páginas de internet que amplían el conocimiento; o de otro tipo de Tecnologías de la Información y la Comunicación, como videos, películas, programas de Word, Excel, PowerPoint, podcast y libros, entre otros.

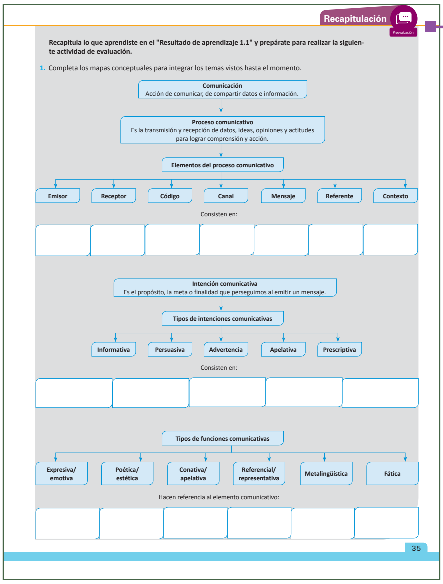

**Actividades formativas**
Tienen la finalidad de que el alumno ponga el práctica lo aprendido y logre extrapolar ese conocimiento teórico a su vida cotidiana. En ellas se trabajan competencias disciplinares, así como genéricas y sus atributos. En cada Resultado de Aprendizaje, están organizadas en secuencia didáctica de: inicio, desarrollo y cierre. Además cada una indica la forma de trabajo: individual, pareja, equipo o en grupo.



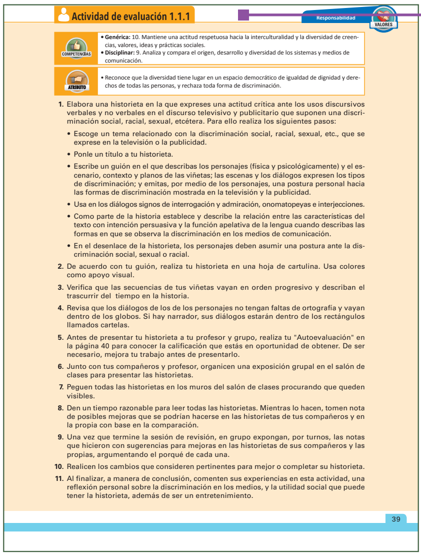

**Valores**
Referidos en las actividades, se trabajan durante toda la clase y en todas las asignaturas.


**Curiosidades**
Son breves textos informativos sobre algo relacionado con los temas de la unidad, que complentan y enriquecen datos de los autores o sucesos que se tratan.

# Estructura de la obra

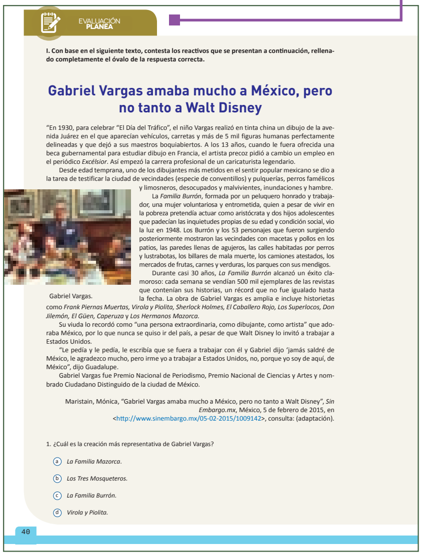


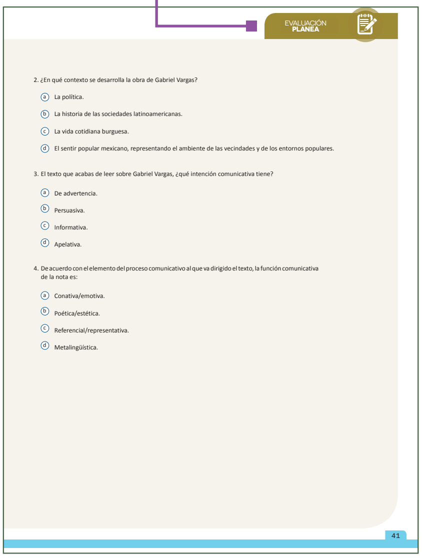

**Recapitulación**
Esta sección aparece antes de cada actividad de evaluación. Consta de un breve resumen, esquema o mapa semántico y se acompaña de preguntas que sirven para valorar los aprendizajes esperados.

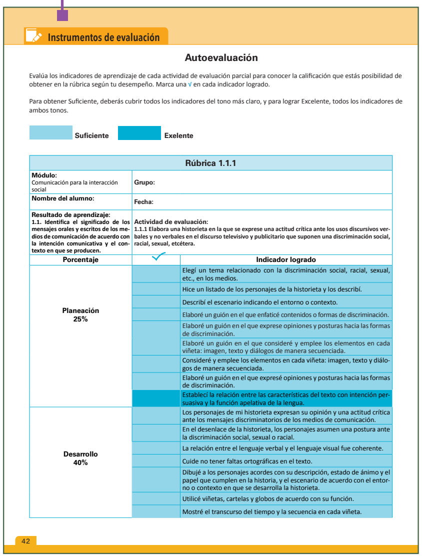


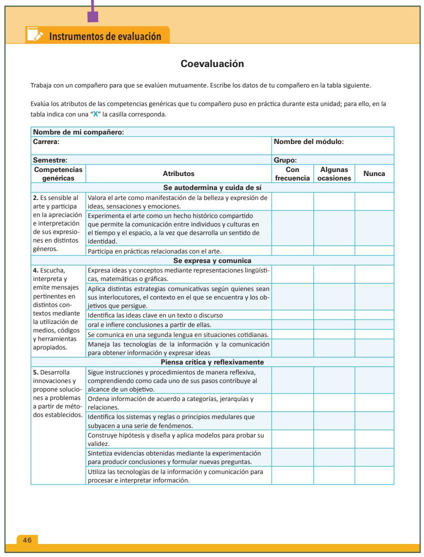

**Prueba Planea**
Se incluye al final de cada unidad con el fin de que los alumnos se preparen para la aplicación de las pruebas Planea y Pisa que realizarán en su último grado escolar.

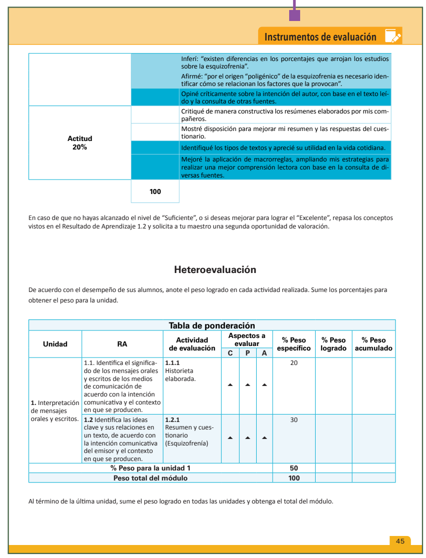
**Actividad de evaluación**
Son las actividades de evaluación marcadas en el programa oficial del módulo que serán calificadas por el SAE (Sistema de Administración Escolar) del Conalep. Desarrolladas con instrucciones claras y precisas para llevarse a cabo.






**Instrumentos de evaluación**

Se incluyen al final de cada unidad en las tres modalidades de: *Autoevaluación* (la realiza el alumno en cada una de las actividades de evaluación parcial marcadas en el programa oficial del módulo que serán calificadas por el SAE), *Coevaluación* (cada alumno evalúa a un compañero considerando los atributos que éste trabajó en la unidad) y *Heteroevaluación* (es la evaluación sumativa que realiza el profesor con base en la calificación que obtiene el alumno en cada evaluación parcial).

**Cultura para la Paz**

Es uno de los Ejes Transversales para el desarrollo de "Aprendizajes para la Vida". En esta sección los alumnos ponen en práctica diversas estrategias para lograr algunas de las habilidades y actitudes éticas sobre valores de: comprensión, orden, justicia, reconocimiento del otro, cooperación, disciplina, equidad, límites democráticos y comunicación, y en particular, sobre la prevención de conflictos, con el fin de que aprendan a crear su propio camino hacia la sana convivencia.

**Cultura financiera y para el consumo**

Es uno de los Ejes Transversales para el desarrollo de "Aprendizajes para la Vida". En esta sección, los alumnos ponen en práctica estrategias para que administren y planifiquen su dinero; desarrollen una actitud crítica hacia el consumo, y conozcan sus derechos y deberes como consumidor. Esto con el fin de que sean capaces de decidir qué consumir, cómo hacerlo y por qué, y basen sus decisiones en el valor real que para ellos tienen los productos, según sus necesidades y deseos.


¿Qué es un lugar geométrico?

¿Qué son y para qué se usan las coordenadas cartesianas?

# Unidad 1

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LUGARES GEOMÉTRICOS

**20 horas**

*"Para alcanzar la verdad, es necesario, una vez en la vida, desprenderse de todas las ideas recibidas, y reconstruir de nuevo y desde los cimientos todo nuestro sistema de conocimientos".*

René Descartes

NO ABANDONO

## Competencias genéricas

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

## Competencias disciplinares básicas de matemáticas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

# Geometría analítica... algo de historia

La geometría analítica se define como un método que unifica el álgebra y la geometría.

Los primeros pasos en la geometría analítica los dio Menecmo hacia el año 350 a.C. cuando intentaba resolver el problema de la duplicación del cubo (construir un cubo de doble volumen a partir de otro dado). Redujo el problema al de la construcción de las dos medias proporcionales entre 2 y 1, es decir, si encontramos $x$ e $y$ tales que:

$$\frac{2}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{1}$$

Entonces $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, y así $x^3 = 2y^3$

Por lo tanto, el cubo de lado $x$ tiene el doble de volumen que el de lado $y$.

A partir de las ecuaciones obtenidas, Menecmo descubrió secciones de un cono circular. También se piensa que él aplicó técnicas que llevaban implícito el sistema de coordenadas que utilizamos hoy en día. Estas secciones encontradas por Menecmo comenzaron a estudiarse más a fondo en el primer siglo de la época helénica donde sobresalían matemáticos como Euclides, Arquímedes y Apolonio de Perga.

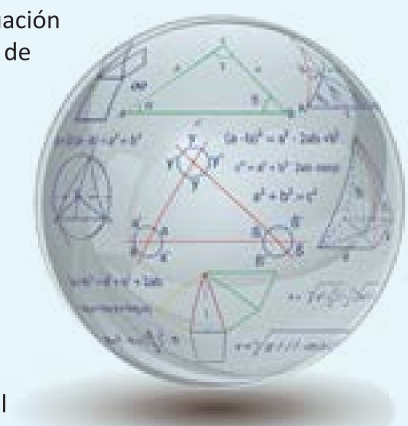
A finales del siglo IV existieron dos obras muy importantes: La primera fue de Aristeo, *El libro de los lugares sólidos*, donde plantea que las cónicas se obtienen por secciones de cilindros; la segunda obra se le atribuye a Euclides, de quien dicen que además de haber escrito *Los elementos* es autor de cuatro tomos sobre las cónicas, de las cuales no queda ningún ejemplar y cuyo contenido se piensa que aparece en las líneas fundamentales de los libros de *Las cónicas* de Apolonio.

Apolonio vivió entre 262-190 a. C.; nació en Perga, en el sur de Asia Menor. Una de sus obras más importantes, *Las cónicas*, recogía en ocho tomos todo el saber de la época acerca de las cónicas y fue él quien dio los nombres de parábola, elipse e hipérbola a las curvas correspondientes (aunque existen indicios de que Arquímedes ya había usado el término parábola).

Los pasos (importantes) siguientes no vendrían sino hasta cerca de 1 800 años después, junto con dos franceses: René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665). A ambos se les considera creadores de la geometría analítica, aunque en forma simultánea e independiente.

La *Geometría* de Descartes fue publicada en 1637 como uno de tres apéndices de su obra más importante, *Discurso del m*étodo. Su trabajo es más general en alcance que el de su compatriota Fermat, y su mérito consiste sobre todo en la aplicación del álgebra del siglo XVI al análisis geométrico de los antiguos. Dos siglos después, Ampère denominó a este método de la geometría como “geometría analítica”.

En tanto, Fermat aplicó en una nueva dirección el estudio de los lugares geométricos. En su trabajo (1629) dedica escasas ocho páginas a la línea, al círculo y a las secciones cónicas. Estableció, en un lenguaje preciso, el principio fundamental de la geometría analítica: “si en una ecuación se tienen dos cantidades desconocidas tenemos un lugar geométrico que puede ser una recta o una curva”; demostró, además, que las ecuaciones de primer grado expresadas en términos generales como $ax + by + c = 0$ representan rectas, mientras que las ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 + y^2 + by + c = 0$ representan circunferencias, y otras ecuaciones de segundo grado pueden representar, en general, parábolas, elipses o hipérbolas. Sin embargo, aunque el trabajo de Fermat fue más sistemático en algunos aspectos no se publicó de hecho sino hasta 1679, después de su muerte, y por esta razón, hoy hablamos de la geometría cartesiana en lugar de la geometría fermatiana. Es una situación que aún hoy implica discusión y confrontación entre los grupos defensores de cada matemático.



Pero valorizar un trabajo más que otro no es quizás lo correcto, pues sería más adecuado destacar los aportes de cada uno de ellos ya que, mientras Descartes comúnmente empezaba con una curva y derivaba su ecuación algebraica, Fermat comenzaba con una ecuación algebraica y derivaba de ella las propiedades geométricas de la curva correspondiente. Así, los trabajos de Descartes y Fermat tomaron juntos, de manera acompasada, los dos aspectos complementarios de la geometría analítica: el estudio de ecuaciones a través del significado de las curvas y el estudio de curvas definidas por ecuaciones.

Ni Descartes ni Fermat usaron sistemáticamente dos ejes de coordenadas en la forma estándar actual. Lo más cercano a ello viene indicado en el principio guía de Fermat: “cuando encontremos dos cantidades conocidas en una ecuación, tenemos un lugar geométrico, la extremidad de una de éstas describe una línea, recta o curva". Además, aunque Fermat pudo haber concebido el modo de construir curvas por medio de las ecuaciones representativas (la "propiedad específica" de cada una, como la llamó), no lo vio o no lo presentó como un procedimiento que pudiera dominar en la matemática; por el contario, para Descartes era un método nuevo y general de resolver todos los problemas.

La geometría analítica es importante para la formación de profesionales en campos como la arquitectura.

En su tiempo se hicieron muy "famosos" tanto Descartes como Fermat, en parte por el nuevo método que ambos aportaban a la ciencia. Lo anterior evidentemente trajo consigo cada vez atraía más miradas, hasta que un día la reina Cristina de Suecia invitó a Descartes en 1649 para que le introdujera en su filosofía. Descartes, reticente, parte en septiembre para Suecia. El alejamiento, el rigor del invierno y la envidia de los doctos del reino dificultan su estancia. La reina le cita en palacio cada mañana puntualmente a las cinco horas para recibir sus lecciones; Descartes, de salud frágil, sufre una neumonía que lo lleva finalmente a la muerte el 11 de febrero a los 53 años de edad.

Por último, podemos decir que ni Descartes ni Fermat son responsables de la geometría analítica actual, ya que fue Leonhard Paul Euler quien, en 1748, sistematizó la geometría analítica de una manera formal. En primer lugar, expuso el sistema de la geometría analítica en el plano (que hoy conocemos como cartesiano) introduciendo, además de las coordenadas rectangulares en el espacio, las oblicuas y las polares. En segundo lugar, estudió las transformaciones de los sistemas de coordenadas. También clasificó las curvas según el grado de sus ecuaciones, estudiando sus propiedades generales.

Sin embargo, no podemos quitar crédito a los franceses fundadores ni a los helenos que elevaron la geometría a niveles no vistos hasta entonces, ni a los alejandrinos que sentaron las ideas básicas de lo que hoy conocemos como cónicas. Sin todos ellos, la geometría analítica no sería hoy lo que es: tal vez nunca habría dado cabida a un vasto territorio virgen de curvas nuevas para ser estudiadas y no se habría convertido en estímulo para la invención de técnicas algorítmicas que permitieran su investigación sistemática o cualquier otro avance y aplicación dentro los cientos que ésta tiene en áreas diversas del desarrollo de la humanidad.

Algunas de éstas van desde la más antigua, su uso en la filosofía matemática, en los tiempos de Grecia, hasta las más actuales y variadas áreas como topografía, en donde se necesitan calcular distancias, ángulos, alturas, etcétera. Los ingenieros civiles la usan mucho para resolver problemas que, sin la ayuda de la geometría analítica y el cálculo diferencial, no serían posibles de resolver.

Además, se utiliza en disciplinas como matemáticas, física, biomatemática, astronomía, ingeniería, arquitectura, etcétera, sin olvidar las investigaciones científicas de todo tipo, la gestión de los recursos y de activos, la arqueología, la evaluación del impacto ambiental, la planificación urbana, la cartografía, la sociología, la geografía histórica, el *marketing*, la economía, la arquitectura (en donde es fundamental), la logística y los sistemas de posicionamiento global por nombrar unos pocos. Por ejemplo, un SIG (sistema de información geográfica) depende de la geometría analítica. Algunos de sus usos son: permitir a los grupos de emergencia calcular fácilmente los tiempos de respuesta en caso de un desastre natural, encontrar los humedales que necesitan protección contra la contaminación, o bien permitirle a una empresa ubicar un nuevo negocio y aprovechar las ventajas de una zona de mercado con escasa competencia.

En la actualidad, siguen surgiendo aplicaciones, como por ejemplo dónde poner el centro de gravedad en un auto de F1 (fórmula 1) o la reducción del ruido que se percibe dentro de las cabinas de los aviones comerciales y militares. También tenemos aplicaciones militares variadas, como los sistemas de guía de misiles, las telecomunicaciones, etcétera.

También la geometría analítica está presente en la formación de profesionales como asignatura de estudio obligatorio en las escuelas de ingeniería, arquitectura, física y matemáticas (entre otras) del mundo entero. El estudio de la geometría analítica persigue el desarrollo intelectual del estudiante en dos campos distintos pero complementarios: la comprensión del entorno que rodea al individuo y el desarrollo de una estructura lógica de pensamiento, lo cual permite al profesional sentar las bases de otras disciplinas, como la mecánica de cuerpos rígidos y deformables así como de fluidos; todo ello le permite enfrentar los problemas específicos de su área según un enfoque heurístico, no memorístico, de la realidad objeto de estudio.

Casanova, F., Madariaga, J. y Gálvez, J. *Geometría Analítica, Algo de Historia*, 22 de junio de 2010, en <https://es.scribd.com/doc/33516043/Geometria-Analitica-Algo-de-Historia>, consulta: mayo de 2016.

## Evaluación de comprensión lectora

**Con base en el texto anterior, lee las siguientes preguntas y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.**

1. ¿Qué personaje de la historia fue el que dio los primeros pasos en la geometría analítica?

   (a) Descartes.

   (b) Menecmo.

   (c) Euclides.

   (d) Euler.

2. A finales del siglo IV se escribieron dos importantes obras. ¿Cuál fue escrita por Aristeo?

   (a) *El libro de los lugares sólidos.*

   (b) *Los elementos.*

   (c) *Las cónicas.*

   (d) *El teorema fundamental del cálculo.*

3. De acuerdo con la lectura, ¿quién dio nombre a la parábola, la elipse y la hipérbola?

   (a) Euler.

   (b) Euclides.

   (c) Descartes.

   (d) Apolonio.

4. Considerando la lectura, ¿a quiénes se les atribuye la creación de la geometría analítica?

   (a) Descartes y Fermat.

   (b) Euler y Descartes.

   (c) Fermat y Einstein.

   (d) Platón y Aristóteles.

5. De acuerdo con Fermat, una ecuación cuadrática puede representar:

   (a) Parábolas, elipses o hipérbolas.

   (b) Cuadrados, círculos y triángulos.

   (c) Parábolas o elipses únicamente.

   (d) Parábolas o hipérbolas únicamente.

**Lee con atención cada pregunta y responde según tus conocimientos.**

1. Escribe la diferencia entre números naturales y números reales.

_______________________________________________

2. Escribe la diferencia entre números naturales y números racionales.

_______________________________________________

3. ¿Cuáles son las operaciones básicas del álgebra?

_______________________________________________

4. Escribe con tus propias palabras qué es un conjunto.

_______________________________________________

5. Escribe los nombres de los ángulos que recuerdes.

_______________________________________________

6. Escribe las características de los cuadrantes de un plano cartesiano.

_______________________________________________

7. Cita los tipos de triángulos que conozcas.

_______________________________________________

8. En tus propias palabras, escribe lo que significa una variable.

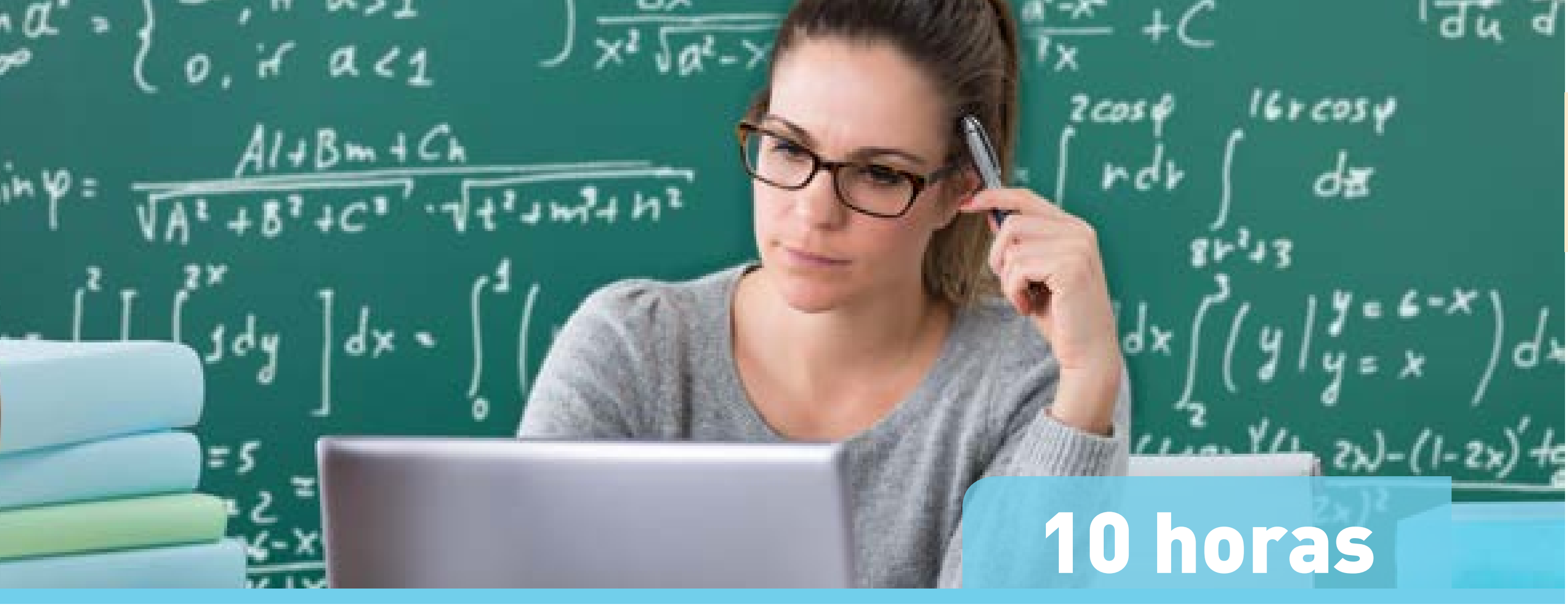
_______________________________________________

9. Escribe el orden en que se resuelve la siguiente operación: $(6+2\cdot4-7\div4)-1$

_______________________________________________

10. Escribe el nombre de los elementos de una división.

_______________________________________________



10 horas

# 1.1 Representa gráficamente espacios geométricos poligonales y considera los principios, leyes y procedimientos gráficos aplicables a la solución de situaciones de la vida cotidiana

Las matemáticas son parte fundamental de la vida diaria. No hay día en el que no pongamos a prueba nuestras habilidades numéricas. Por ejemplo, cuando se adquiere algún bien se debe tener cuidado con el cambio que se recibe.

Mucho de lo que se verá a continuación tiene que ver con aspectos que no son tan notorios en la vida diaria pero con los que convivimos en forma inconsciente. Un ejemplo sencillo se encuentra en la selección de un cierto producto, la cual obedece a una preferencia personal, por lo tanto, dicho producto se puede relacionar como algo positivo. Igualmente, al caminar se busca la ruta más corta para llegar un determinado destino.

En términos generales, la geometría analítica estudia las figuras geométricas utilizando herramientas matemáticas básicas en un determinado sistema coordenado. Entonces, a lo largo de esta sección se verán temas fundamentales para la representación y descubrimiento de elementos en el plano cartesiano.

## Actividad de inicio

Reflexión — VALORES

COMPETENCIAS
- **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

ATRIBUTO
- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.

1. De manera individual, escribe en tu cuaderno los pasos que sigues cuando tienes que ir desde un punto A a uno B. Por ejemplo, de la cocina a tu cuarto.
2. De la descripción dada, ¿por qué crees que es importante encontrar la ruta más corta?

3. Suponiendo que antes de llegar al punto B tuvieras que pasar por un punto C, ¿qué tendrías que considerar para cumplir esta solicitud?

4. Para finalizar, comenta tus reflexiones con el grupo.

# Empleo de relaciones y funciones

De acuerdo con la definición del Diccionario de la lengua española de la Real Academia Española, una relación "es el resultado de comparar dos cantidades expresadas en números". Por su parte, el término función lo define como la "relación entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primero un elemento del segundo o ninguno". Considerando estas definiciones podemos observar que las relaciones conllevan la comparación de dos elementos numéricos, mientras que las funciones asocian elementos de diferentes conjuntos.

CURIOSIDADES

Etimológicamente hablando, la palabra "variable" proviene del latín *variabilis*, donde "*vari(us)*" significa varios y "*-abilis*" quiere decir capaz, por lo que en conjunto significan "capaz de cambiar".

## Variables dependientes e independientes

La palabra "variable" indica la incertidumbre sobre el valor de algo, o en otras palabras, que existe un cambio sobre alguna situación determinada.

En matemáticas es común representar los elementos asociados con un problema mediante letras. Es usual utilizar las últimas letras del alfabeto para representar una variable, y las primeras letras para representar constantes. Igualmente, las letras griegas son un buen recurso cuando se desea representar variables.

Una constante es la contraparte de una variable. Un valor constante, tal como su nombre lo indica, no cambia de valor.

Para que el valor de una variable cambie, es necesario que suceda algo que la obligue a modificar su valor. Un ejemplo de lo anterior se encuentra en el clima. A diario existen variaciones en la temperatura, mismas que están determinadas por la situación climatológica.

En esta sección nos concentraremos en dos tipos de variables: dependiente e independiente. Una **variable dependiente** es aquella cuyo valor obedece al valor que tome una o más variables. Por el contrario, el valor de **una variable independiente** no obedece al que pueda tomar una o más variables.

En el **plano cartesiano**, las variables dependientes se sitúan en el eje de las ordenadas, mientras que las variables independientes se colocan en el eje de las abscisas. Es común representar una variable independiente con la letra *y*, mientras que para representar una variable dependiente se utiliza la letra *x*.

## Relaciones

En matemáticas, una relación es un vínculo o correspondencia entre dos o más conjuntos de valores. De acuerdo con lo anterior, las relaciones se dividen en:

- **Binarias:** relación de dos conjuntos.
- **Ternarias:** relación de tres conjuntos.
- **Cuaternarias:** relación de cuatro conjuntos.
- ***N*-aria:** relación de *n* conjuntos.

El tipo de relación más común es la relación binaria. Gráficamente, una relación binaria puede representarse a través del plano coordenado o cartesiano. Como hemos visto, las variables dependientes se sitúan en el eje de las ordenadas mientras que las variables independientes se sitúan en el eje de las abscisas.

A manera de ejercicio, considera el conjunto $A = \{1, 3, 6, 7, 10, 11\}$ y el conjunto $B = \{-1, -4, 7, 8, 9\}$. Se quiere establecer una relación binaria entre los elementos del conjunto $A$ con los elementos del conjunto $B$ de tal forma que cada elemento de $A$ esté relacionado con cada uno de los elementos de $B$. De acuerdo con lo anterior, ¿cuál sería el conjunto resultante? Ahora definiremos de manera formal el concepto de relación binaria.

**Definición**: Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Una relación (binaria) $R$ de $A$ en $B$ es un subconjunto de $A \times B$ (producto cruz):

$$R \subset A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

TIC

La página *Mathgametime* presenta una serie de juegos relacionados con el tema de variables.

http://www.mathgametime.com/games/swimming-otters-variable-expression

NO ABANDONO

"No basta tener buen ingenio; lo principal es aplicarlo bien".
René Descartes

De acuerdo con la definición anterior, una relación puede denotarse como $aRb$ cuando $(a, b) \in R$. Si se cumple la relación $aRb$, entonces diremos que $a$ está relacionado con $b$.

A continuación, se listan algunas propiedades que una relación puede tener. Sea $R$ una relación en un conjunto $A$.

- La relación $R$ es reflexiva si:

$$\forall\, a \in A,\ aRa$$

- La relación $R$ es simétrica si:

$$\forall\, a \in A,\ aRb \Leftrightarrow bRa$$

- La relación $R$ es antisimétrica si:

$$\forall\, a, b \in A,\ aRb \text{ y } bRa \Rightarrow a = b$$

- La relación $R$ es transitiva si:

$$\forall\, a, b, c \in A,\ aRb \text{ y } bRc \Rightarrow aRc$$

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ el conjunto de relaciones binarias en $A$. Según el listado anterior de las propiedades de las relaciones, $R$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones entre los conjuntos $A$ y $B$. Sea $S$ una relación entre el conjunto $B$ y el conjunto $C$. De acuerdo a lo anterior, las operaciones posibles entre relaciones son las siguientes:

- La relación de unión de $R_1$ y $R_2$, $R_1 \cup R_2$ es una relación de $A$ en $B$ dada por:

$$R_1 \cup R_2 = \{(a, b) : (a, b) \in R_1 \text{ o } (a, b) \in R_2\}$$

- La relación de intersección de $R_1$ y $R_2$, $R_1 \cup R_2$ es una relación de $A$ en $B$ dada por:

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, b) : (a, b) \in R_1 \text{ y } (a, b) \in R_2\}$$

- La relación de diferencia de $R_1$ y $R_2$, $R_1 - R_2$ es una relación de $A$ en $B$ dada por:

$$R_1 - R_2 = \{(a, b) : (a, b) \in R_1, (a, b) \notin R_2\}$$

- La relación complementaria de $R_1$, $\overline{R_1}$ es una relación de $A$ en $B$ dada por:

$$\overline{R_1} = \{(a, b) : (a, b) \in A \times B, (a, b) \notin R_1\}$$

- La diferencia simétrica de $R_1$ y $R_2$, $R_1 \oplus R_2$ es una relación de $A$ en $B$ dada por:

$$R_1 \oplus R_2 = \{(a, b) : (a, b) \in R_1 \oplus (a, b) \in R_2\}$$

- La relación de composición de $R_1$ y $S$, $R_1 \circ S$ es la relación:

$$S \circ R_1 = \{(a, b) \in A \times C : \exists b \in B, (a, b) \in R_1, (b, c) \in S\}$$

- La relación inversa de $R_1$, $R_1^{-1}$ es la relación de $B$ en $A$ tal que:

$$R_1^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R_1\}$$

Considera las relaciones $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$ y $R_2 = \{(1, 2), (3,4), (4, 5)\}$; entonces:

- La unión entre $R_1$ y $R_2$, $R_1 \cup R_2$ es $\{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$
- La intersección entre $R_1$ y $R_2$, $R_1 \cup R_2$ es $\{(1, 2), (4, 5)\}$
- La diferencia entre $R_1$ y $R_2$, $R_1 - R_2$, es $\{(2, 3)\}$
- La diferencia simétrica entre $R_1$ y $R_2$, $R_1 \oplus R_2$, es $\{(2, 3), (3, 4)\}$
- La relación inversa de $R_1$, $R_1^{-1}$ es $\{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$

El dominio de una relación corresponde al conjunto de valores independientes que tiene la relación. De manera complementaria, el rango de una relación corresponde al conjunto de valores dependientes que produce una relación.

# Funciones

Una función señala una dependencia entre dos conjuntos. Así, una función *f* marca la dependencia de un conjunto *D* con un conjunto *E*. Entonces, podemos decir que una función es una regla de correspondencia entre los elementos de un conjunto *D* con exactamente un elemento de algún otro conjunto *E*.

Se acostumbra representar una función a través de las letras *f*, *g* o *h*. De esta manera, una función *f* de un conjunto *D* a un conjunto *E* se representa con la notación $f: D \rightarrow E$.

Cuando hablamos de funciones es importante tomar en cuenta el **dominio** de la misma. El dominio de una función es el subconjunto de números reales en el que se encuentra definida. Generalmente se designa utilizando la letra *D*. La **figura 1.1** ilustra lo anterior.

La letra *x*, en la **figura 1.1**, representa un número perteneciente al **dominio** de la función y recibe el nombre de **variable independiente**. Por su parte, el elemento *y*, que pertenece al conjunto *E*, es el valor de *f* en *x* (o la imagen de *x* bajo la función *f*) y está denotado por $f(x)$. La **figura 1.2** ejemplifica los conceptos anteriores.

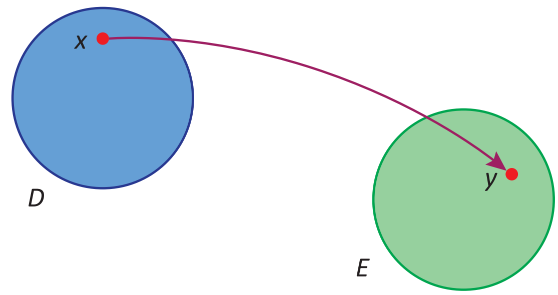



Figura 1.1. Ejemplo de una función que va de *D* a *E*.

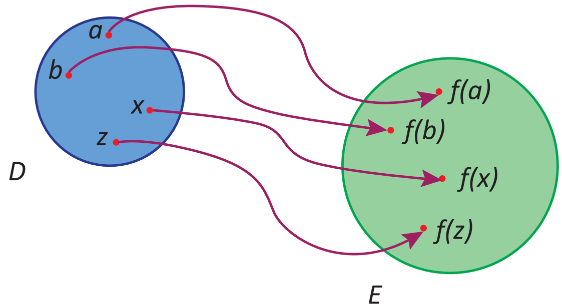



Figura 1.2. Ejemplo de una función. El conjunto *D* representa el dominio y el conjunto *E* la imagen.

**Ejemplo:**

Sea *f* una función con dominio *R* (los números reales) tal que $f(x) = x^2$ para toda x que existe en *R*; encontrar:

a) $f(-6)$

b) $f(\sqrt{3})$

c) $f(a+b)$

Solución:

$f(-6) = (-6)^2 = 36$

$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$

$f(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Ejemplo**:

Determina el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2+2x-15}$

La expresión bajo el signo radical, el radicando, debe ser no negativa, esto es, el dominio de *f* es el conjunto de los números reales *x* para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$, o bien $(x-3)(x+5) \geq 0$. El conjunto solución de la desigualdad anterior $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$, también es el dominio de *f*.

Las funciones están ligadas a la definición de relación binaria, pues una función asocia un elemento de un dominio dado con un elemento del conjunto imagen.

A través de las relaciones formadas con el dominio y la imagen se puede representar una función mediante un plano coordenado. Esta representación gráfica se encuentra conformada por el conjunto de todos los pares ordenados $[x, f(x)]$ de la función *f*, es decir, como un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ (**figura 1.3**).

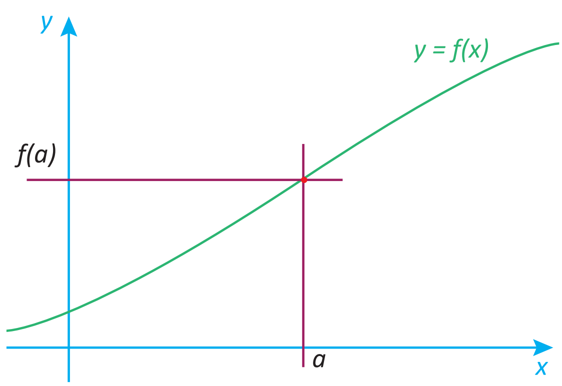



Figura 1.3. Representación gráfica de una función.

## Actividad de desarrollo

Laboriosidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- **Disciplinar:** 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

ATRIBUTO

- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.

**1.** De manera individual, practica lo que has aprendido hasta el momento. Para ello, calcula y grafica en tu cuaderno el siguiente conjunto de funciones para $x = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1,2, 3, 4, 5\}$.

1) $f = 2x + 1$
2) $f = x^2$
3) $f = x^3 + 3$

**2.** Entrega tus respuestas al profesor.

TIC

Visita el siguiente enlace para descubrir diferentes aplicaciones de la geometría analítica en la vida diaria.

http://www.ehowenespanol.com/utiliza-geometria-vida-real-info_181008/

# Identificación de los fundamentos de la geometría analítica

La geometría analítica fue concebida por el filósofo y matemático René Descartes en 1637 como la unión del álgebra y la geometría. La característica básica de la geometría analítica es el uso de un sistema coordenado.

Como vimos en temas anteriores, las relaciones binarias comprenden dos elementos, los que a su vez pueden ilustrarse en un plano coordenado o cartesiano. Igualmente, una función nos permite encontrar una sucesión de puntos en un plano. Es importante destacar que cualquier situación compleja está hecha de elementos básicos. De esta forma, el concepto de relación, en apariencia simple si se deja como un término aislado, al trasladarlo junto con los conceptos de función y geometría analítica, es posible entender mejor estos temas más complejos.

## Segmento dirigido

Una recta dirigida es una recta en la que una de sus direcciones se escoge como positiva y la dirección opuesta como negativa. Un segmento de la recta está formado por dos puntos cualesquiera dentro de la recta, y la parte entre ellos se llama segmento de recta dirigido. En la **figura 1.4**, la dirección positiva está indicada por una flecha. Los puntos $A$ y $B$ determinan un segmento denotado por $\overline{AB}$. En este segmento al punto $A$ se le conoce como origen o punto inicial, en tanto que el punto $B$ es el extremo o punto final.

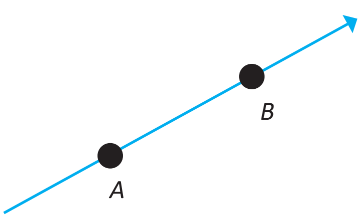


Figura 1.4. Segmento de recta.

Supongamos que la distancia del segmento de recta, de la **figura 1.4**, es $\overline{AB} = 3$: la distancia del mismo segmento, pero ahora con los puntos intercambiados, resulta $\overline{BA} = -3$. Sin embargo, la magnitud de la distancia del segmento $\overline{AB}$ y del segmento $\overline{BA}$ es la misma.

La distancia no dirigida es la longitud del segmento y se considera positiva. Desde el punto de la geometría elemental, las longitudes de los segmentos no dirigidos, como el caso descrito de $\overline{AB}$ y de $\overline{BA}$, son las mismas. En geometría analítica, sin embargo, se hace distinción entre los signos de estas longitudes.

La distancia entre dos puntos de un segmento de recta se define como el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos.

De acuerdo con lo anterior, si representamos la distancia entre dos puntos mediante la variable $d$, podemos escribir:

$$d = |\overline{AB}| = |b - a|$$

O también:

$$d = |\overline{BA}| = |b - a|$$

Ilustraremos lo anterior con el siguiente ejemplo: hallar la distancia entre los puntos 5$y$ – 3 en una recta numérica. Consideremos $a = 5$ y $b = -3$, así que según lo expuesto:

$$d = |a - b|$$
$$d = |5 - (-3)|$$
$$d = |5 + 3|$$
$$d = 8$$

Para demostrar que la distancia del punto $a$ al punto $b$ es la misma que del punto $b$ al punto $a$ calculemos ahora la distancia entre –3 y 5:

$$d = |a - b|$$
$$d = |-3 - 5|$$
$$d = |-8|$$
$$d = 8$$

Ahora que se tiene una mejor noción acerca de la distancia entre dos puntos de un segmento de recta, se definirá el siguiente teorema.

**Teorema 1.1:** Si $A$, $B$ y $C$ son tres puntos de una recta dirigida, entonces, la distancia dirigida determinada por estos puntos satisface las siguientes ecuaciones:

1) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
2) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$
3) $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$


Figura 1.5. Ilustración del **teorema 1.1.**

La **figura 1.5** ilustra el **teorema 1.1.** Por ejemplo, el punto 1 del teorema se puede entender a través de la figura anterior, ya que en ella observamos que la distancia del punto $A$ al punto $C$ incluye al punto $B$. Es por ello que la suma de la distancia del punto $A$ al punto $B$ y de la distancia del punto $B$ al punto $C$ es equivalente a la distancia del punto $A$ al punto $C$.

Conoce más sobre este tema en el video "El Plano Cartesiano":
https://www.youtube.com/watch?v=hSbbKBuliiU

## Sistema coordenado en el plano

Hasta el momento, hemos visto la distancia entre diferentes puntos en un segmento rectilíneo. La representación de elementos geométricos bajo este esquema es muy limitada. Por ejemplo, no podemos hacer un análisis de los puntos de una circunferencia.

En la recta podemos establecer un punto origen, denotado como $O$, el cual servirá para establecer las direcciones positiva y negativa en la recta. Así, al lado derecho del punto origen de la recta se encuentran los números positivos y al lado izquierdo los números negativos. Igualmente, a partir de este punto origen podemos establecer la medida de distancia que se utilizará.

Para dibujar un plano se traza una recta horizontal y una recta vertical justo en el origen como se muestra en la **figura 1.6.** La recta horizontal se llama eje $x$ o eje de las abscisas y la recta vertical se llama eje $y$ o de las ordenadas. Al eje $x$ y el eje $y$ se les conoce como eje de coordenadas, y el plano determinado por los ejes coordenados se llama **plano coordenado**. De cada eje coordenado se hace una escala numérica real con una unidad de longitud adecuada, donde el origen sea el punto cero. Finalmente, en la misma figura se observan los cuadrantes con los respectivos signos de sus pares ordenados.

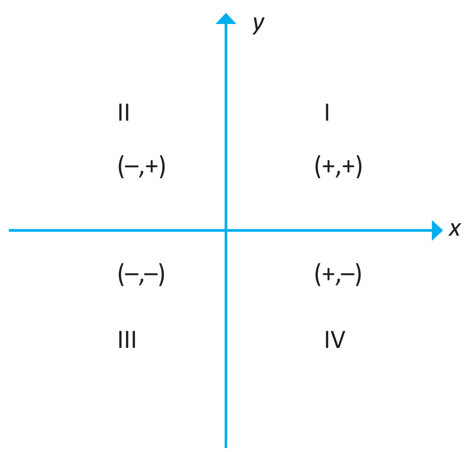



Figura 1.6. Plano.

## Distancia entre dos puntos

En secciones anteriores hemos visto cómo calcular la distancia de un punto $A$ a un punto $B$ en un segmento de recta; sin embargo, es importante conocer cómo calcular la distancia entre dos puntos dados en un plano coordenado o cartesiano.

Dos puntos en un plano coordenado pueden formar un segmento de recta cuya posición sea **horizontal**, **vertical** o **inclinada** dependiendo si el segmento es paralelo al eje $x$, al eje $y$ o a ningún eje.

La distancia entre dos puntos en un segmento de recta horizontal, paralelo al eje $x$, es igual a la abscisa del segundo punto menos la abscisa del primer punto. La distancia será positiva o negativa dependiendo de si el segundo punto se encuentra a la derecha o a la izquierda del primero. Lo mismo sucede cuando tenemos un segmento de recta vertical.

Sin embargo, no siempre se conoce cuál de los puntos está a la derecha y cuál a la izquierda. En ese caso se puede utilizar la siguiente expresión equivalente para una recta horizontal:

$$\left|P_1P_2\right| = \left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{x_1 - x_2}$$

La fórmula para la recta vertical es equivalente a la presentada para la recta horizontal.

En la **figura 1.7** se pueden observar dos segmentos de recta. El segmento del punto *A* al punto *B* representa un segmento horizontal, mientras que el segmento del punto *C* al punto *D* representa un segmento vertical. Para calcular la distancia entre el punto *A* y el punto *B* simplemente tenemos que restar la abscisa del punto *B* menos la abscisa del punto *A*, esto es, 6 – (–2), lo cual da como resultado *B*. Lo mismo sucede para calcular la distancia del punto *C* al punto *D* excepto que la resta será entre las ordenadas de cada punto. El resultado de esta operación es –5.

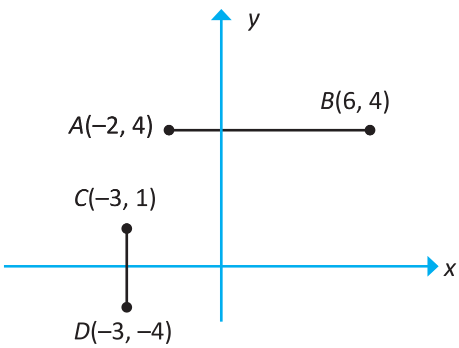



Figura 1.7. Ejemplo de distancia entre dos puntos.

Para calcular la distancia entre dos puntos que pertenecen a un segmento de recta que no es vertical ni horizontal, hacemos uso del famoso teorema de Pitágoras, el cual establece que la suma de los cuadrados de los lados perpendiculares de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Considera los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, ilustrados en la **figura 1.8**, los cuales determinan un segmento de recta inclinado. Para poder calcular la distancia entre estos puntos, es necesario trazar un segmento de recta que pase por $P_1$ y sea paralelo al eje *x*, así como un segmento de recta que pase por $P_2$ y sea paralelo al eje *y*. Estos dos segmentos se intersecan en el punto *R*, cuya abscisa es $x_2$ y cuya ordenada es $y_1$. Por tanto:

$$\overline{P_1R} = x_2 - x_1 \text{ y } \overline{RP_2} = y_2 - y_1$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\left|P_1P_2\right|^2 = \left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

Tomando en cuenta que ambos extremos de la igualdad están elevados al cuadrado, entonces puede aplicarse la raíz cuadrada sin afectar la igualdad. De acuerdo con lo anterior y considerando a la variable *d* como la distancia entre los puntos $P_1$ y $P_2$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En resumen, para encontrar la distancia entre dos puntos, se suma el cuadrado de la diferencia de las abscisas con el cuadrado de las diferencias de las ordenadas y se obtiene la raíz cuadrada.

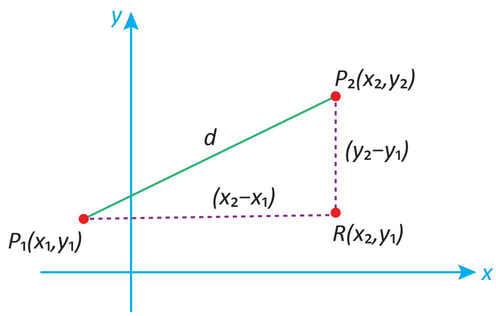



Figura 1.8. Ejemplo de distancia entre dos puntos.

# Perímetro de polígonos

En geometría, un polígono es una figura bidimensional compuesta por una secuencia de líneas consecutivas que forman una región en el plano. A cada una de estas líneas se le conoce como lados del polígono y los puntos en los que se une cada lado se llaman vértices.

Los vértices de un polígono forman un ángulo. Tomando en cuenta este ángulo y el tamaño de los lados de un polígono, podemos diferenciar dos tipos de polígonos:

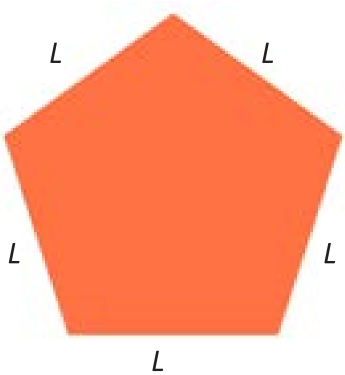
- **Polígono regular**: es un polígono con todos los lados y ángulos iguales.
- **Polígono irregular**: polígono con los lados y ángulos desiguales.

El perímetro de un polígono regular se obtiene con la suma de sus *n* lados.

$$P = L + L + \ldots + = n \text{ veces } L = nL$$

Por ejemplo, el perímetro de la **figura 1.9** se obtiene al hacer la suma de cada uno de sus lados. Como en este caso, como se trata de un polígono regular, se puede simplificar la suma con la multiplicación.

Para aquellos polígonos irregulares, con ángulos y lados diferentes, como puede ser un triángulo, no se puede calcular el perímetro como el producto del tamaño de uno de sus lados por el número de lados. El perímetro para este tipo de polígonos se calcula sumando cada uno de sus lados.




$P = L + L + L + L + L = 5 \cdot L$

Figura 1.9. Polígono de cinco lados y el cálculo de su perímetro.

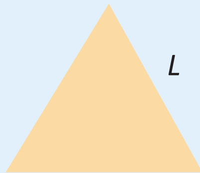
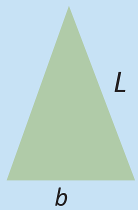
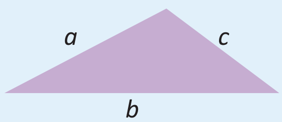
| Nombre | Forma | Perímetro |
|---|---|---|
| Triángulo equilátero |  | $P = 3 \cdot L$ |
| Tríangulo isósceles |  | $P = 2 \cdot L + b$ |
| Triángulo escaleno |  | $P = a + b + c$ |

Figura 1.10. Perímetro de los tipos de triángulos.

La **figura 1.10** ilustra algunos ejemplos del cálculo del perímetro de polígonos irregulares y regulares, en específico de los triángulos. En el caso particular del triángulo escaleno, el perímetro se obtiene sumando cada uno de sus lados, caso contrario al del triángulo equilátero donde podemos simplificar la suma con una multiplicación.

## Área de polígonos

En la sección anterior vimos cómo calcular el perímetro de una figura poligonal. En esta sección nos concentraremos en el cálculo del área de estas mismas figuras geométricas.

El área de un polígono es el cálculo de la región o superficie encerrada por un polígono. Para realizar el cálculo del área de un polígono se debe hacer uso de un elemento adicional a los lados del mismo: la apotema. La apotema de un polígono regular es el segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono a uno de sus lados. En otras palabras, la apotema es la **mediatriz** del lado correspondiente. Una característica importante es que las apotemas de un polígono regular tienen el mismo tamaño.

**Glosario**

**Mediatriz:** recta perpendicular a un segmento que se traza en su punto medio.

En la **figura 1.11** se puede apreciar un pentágono denotado por los vértices *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. El centro del polígono esta denotado por *X*. Finalmente, el segmento $\overline{XF}$ corresponde a la apotema.

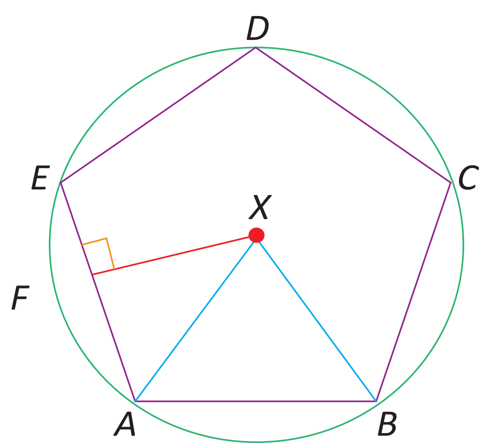



Figura 1.11. Apotema de un polígono.

Como se ha mencionado, el área de un polígono regular se calcula a partir de su perímetro y su apotema. Sea *P* un polígono regular con *N* lados; su área se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{\text{apotema} \cdot \text{perímetro}}{2}$$

El cálculo del área de un polígono irregular requiere de métodos alternativos. El método más común consiste en dividir el polígono en *N* triángulos (siendo *N* el número de lados del polígono) y, posteriormente, calcular el área como suma de las áreas de los triángulos. La **figura 1.12** muestra un polígono irregular. La fórmula general para calcular el área de un polígono irregular es la siguiente:

En la página *Infoymate* conocerás más fórmulas de áreas y perímetros.

TIC

http://www.infoymate.es/mate/geomcuad/periarea/periarea.htm

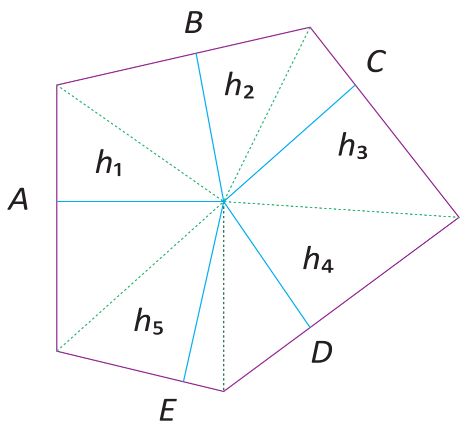



Figura 1.12. Área de un polígono irregular.

$$\text{Área} = \frac{A \cdot h_1}{2} + \frac{B \cdot h_2}{2} + \frac{C \cdot h_3}{2} + \ldots + \frac{N \cdot hN}{2}$$

Donde *A*, *B*, *C*, ..., *N* representan cada uno de los lados y $h_i$ representa la altura de los triángulos.

## Actividad de desarrollo

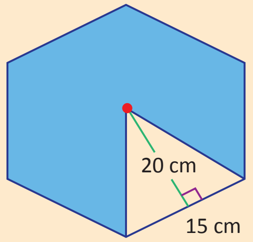
Dedicación

VALORES

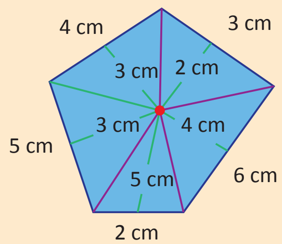
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. |

**1.** En pareja, pongan en práctica lo que han aprendido. Para ello, en su cuaderno calculen el área sombreada de las siguientes figuras y el perímetro de cada uno de los polígonos.

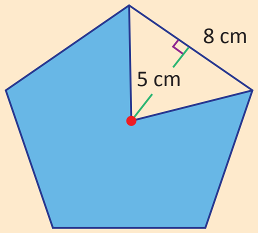
1)



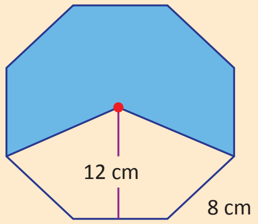

3)




2)




4)




**2.** Entreguen sus resultados al profesor.

# División de un segmento en una razón dada

En esta sección se muestra cómo hallar las coordenadas de un punto que divide un segmento de recta en dos partes que tienen una relación específica. Como primer aproximación se tiene la estimación del punto medio en un segmento de recta.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta, como muestra la **figura 1.13**, y sean $P(x, y)$ las coordenadas que dividen a este segmento de recta en una razón dada, $r = \overline{AP}:\overline{PB}$. De esta manera, tenemos que:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad r \neq -1$$

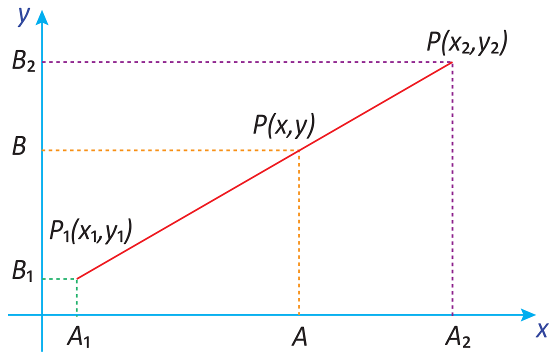


Figura 1.13. Cálculo de un punto dentro de un segmento de recta.

En otras palabras, $r$ representa la ubicación del punto que deseamos encontrar. Por ejemplo, si $r = 1$ significa que deseamos encontrar las coordenadas para el punto medio del segmento de recta.

Las tres rectas paralelas $AA'$, $PP'$ y $BB'$ interceptan segmentos proporcionales sobre las dos rectas transversales $AB$ y $A'B'$. Por tanto, podemos escribir:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} \qquad (1)$$

Las coordenadas de las perpendiculares al eje $X$ son $A'(x_1,0)$, $B'(x_2, 0)$ y $P'(x, 0)$. En consecuencia, al tomar en cuenta el **teorema 1.1** tenemos:

$$\overline{A_1A} = x - x_1 \qquad \overline{AA_2} = x_2 - x$$

Sustituyendo estos valores obtenemos:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Donde:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad r \neq -1$$

Por un procedimiento semejante podemos encontrar el valor de las ordenadas:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \qquad (2)$$

Donde:

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad r \neq -1$$

Finalmente, si el punto de división $P$ es externo al segmento de recta, la razón $r$ es negativa. Para lo anterior, considera el siguiente ejemplo: $P_1(-4, 2)$ y $P_2(4, 6)$ son los puntos extremos del segmento de recta $P_1P_2$. Hallar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a este segmento con $r = 3$. Como ya hemos visto, si la razón $r$ es negativa entonces el punto de división $P$ es externo al segmento de recta. Si aplicamos directamente las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-4 + (-3)4}{1 + (-3)} = 8$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{2 + (-3)6}{1 + (-3)} = 8$$

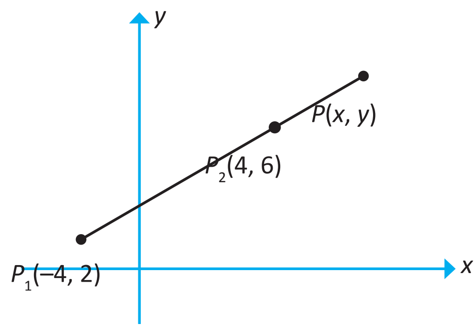


Figura 1.14. Punto fuera del segmento de recta.

De esta forma sabemos que el punto $P$ tiene las coordenadas (8, 8), lo que se muestra en la **figura 1.14.**

# Actividad de desarrollo

Laboriosidad

VALORES

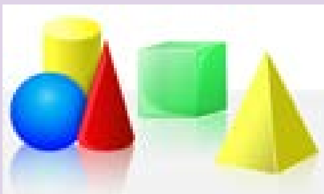
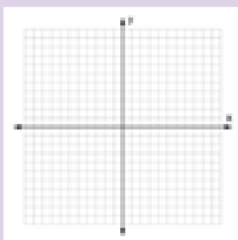
COMPETENCIAS

- **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

ATRIBUTO

- Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.

1. De manera individual, practica lo que has aprendido en este apartado. Para ello, copia en tu cuaderno el siguiente cuadro que contiene los conceptos básicos de geometría y complétalo.

| Concepto | Figura | Definición |
|---|---|---|
| Geometría |  | |
| Plano | | Representan una ciudad o parte de ella, como también puede referirse a un edificio, una urbanización, un conjunto residencial. |
| Plano cartesiano |  | |
| |  | Se define como la distancia más corta entre dos puntos del plano. |
| Punto | | |
| Polígono | | Figura plana compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que cierran una región en el plano. |

2. Entrega tu cuadro al profesor.

# Punto medio

En la sección anterior vimos cómo calcular las coordenadas para un punto arbitrario considerando los puntos correspondientes a un segmento de recta dado. El siguiente corolario considera el hecho de que el punto *P* sea el punto medio en un segmento de recta.

**COROLARIO**. Las coordenadas del punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos son $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (3)$$

**Ejemplo**:

Dados los puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(0, 4)$ encontrar las coordenadas del punto medio *P* del segmento que los une. Para resolver este problema, basta con sustituir los valores correspondientes en las ecuaciones (3), tal como se muestra a continuación:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$$

De esta forma, el punto medio *P* está en las coordenadas (1, 4).

## Actividad de cierre

Responsabilidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques

ATRIBUTO

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

**1.** En pareja, pongan en práctica lo aprendido. Para ello, hagan lo siguiente:

1) Grafiquen y demuestren que los puntos $P_1(3,3), P_2(-3,-3)$ y $P_3(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero. Para demostrar lo anterior, consideren las propiedades antes mencionadas de un triángulo equilátero.

2) Calculen el perímetro y el área de un octágono regular que mide 6.5 cm de lado por 3.5 de apotema.

3) Calculen y grafiquen la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Consideren a $x = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

4) Del ejercicio anterior determinen cuál es su dominio y cuál es su rango.

**2.** Comparen sus respuestas con otra pareja y entreguen sus resultados al profesor.

NO ABANDONO

"El único lugar donde el éxito viene antes del trabajo es en el diccionario".
Vinde Lombardi

## Recapitulación

Preevaluación

**Recapitula lo que aprendiste en la primera parte del "Resultado de aprendizaje 1.1" y prepárate para realizar la actividad de evaluación 1.1.1.**

1. Completa los siguientes mapas conceptuales.

**Representación gráfica de lugares geométricos**

Empleo de relaciones y funciones

| Variables dependientes e independientes | Funciones | Relaciones |
|---|---|---|
| Se definen como | Se definen como | Se definen como |
| | | |

**Identificación de los fundamentos de la geometría analítica**

Empleo de relaciones y funciones

| Seguimiento dirigido | Distancia entre dos puntos | Perímetro de polígonos | Área de polígonos | Divisón de un segmento en una razón dada | Punto medio |
|---|---|---|---|---|---|
| Se definen como | Se definen como | Se definen como | Se definen como | Se definen como | Se definen como |
| | | | | | |

**Realiza tu evaluación parcial.**

1. Analiza cada una de las columnas y une con una línea los términos de la columna izquierda con los de la columna derecha según corresponda.

- ◯ Una relación es
- ◯ Una función es
- ◯ Una variable es
- ◯ Las últimas palabras del alfabeto representan
- ◯ Las primeras letras del alfabeto representan
- ◯ Segmento dirigido
- ◯ Dominio
- ◯ Rango
- ◯ Distancia entre dos puntos

1. Variables
2. Conjunto de valores independientes que una relación puede tener.
3. Constantes
4. La relación entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primero un elemento del segundo o ninguno.
5. Un elemento que cambia de valor en un determinado momento.
6. El resultado de comparar dos cantidades expresadas en números.
7. Conjunto de valores dependientes que una relación puede producir.
8. Es una recta en la que una de sus direcciones se escoge como positiva y la dirección opuesta como negativa.
9. Forman un segmento de recta cuya posición puede ser horizontal, vertical o inclinada.

2. Completa la siguiente tabla de fórmulas.

| Nombre | Perímetro |
|---|---|
| Triángulo equilátero | |
| | $P = 2 \cdot l + b$ |
| Triángulo escaleno | |
| | $P = 5 \cdot l$ |

Valor: 5 puntos

# Actividad de evaluación 1.1.1

dedicación

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

ATRIBUTO

- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.

EVALUACIÓN

RÚBRICA

TIC

**1.** De manera individual, construye lugares geométricos poligonales en un sistema cartesiano, obteniendo la longitud de sus lados, medición de sus ángulos y la superficie delimitada. Para ello, realiza lo siguiente:

**2.** Localiza puntos y realiza uniones para demostrar si forman un espacio geométrico, empleando los cuatro cuadrantes del plano cartesiano.

1) Localiza 5 puntos en el plano cartesiano e indica el cuadrante en el que se encuentran.

a) $P_1(3,2)$

b) $P_2(-3,2)$

c) $P_3(-3,-2)$

d) $P_4(3,-2)$

e) $P_5(0,0)$

2) Une los siguientes puntos: $P_1(4,7)$, $P_2(-1,3)$ y $P_3(-6,-1)$. Demuestra que los puntos pertenecen a una línea recta.

3) El piso del salón representa un plano cartesiano, si la esquina de la puerta del salón es el punto (0,0) y el eje *x, y,* son las orillas de las paredes que interceptan la esquina ¿en qué punto del salón está sentado un alumno en particular?, ¿a qué distancia se encuentra separado del escritorio? Utiliza unidades en metros. Representa tus resultados gráficamente.

4) Determina si los siguientes puntos forman o no un paralelogramo. Grafica el resultado.

- $P_1(-9,-2)$, $P_2(2,-2)$, $P_3(5,5)$, $P_4(-6,5)$

5) Localiza en el plano cartesiano tres puntos arbitrarios que formen los vértices de un triángulo isósceles. Grafica el resultado.

6) Describe el procedimiento que seguiste para resolver cada uno de los ejercicios anteriores.

**3.** Calcula la distancia entre dos puntos localizados dentro del plano cartesiano, determinando perímetros y tipos de polígonos formados por varios pares coordenados.

1) Localiza los siguientes pares de puntos:

a) $P_1(0,0)$

b) $P_2$ (2,4)

c) $P_3$ (–2,4)

d) $P_4$ (6,8)

e) $P_5$ (–3,–2)

2) Calcula el perímetro de dos triángulos que te indique tu profesor dados sus vértices (*A*, *B* y *C*).

3) Traza los 2 triángulos anteriores con los vértices y encuentra las longitudes de sus

lados.

4) Calcula el ángulo interior en los dos triángulos.

5) Calcula el área de los dos triángulos.

6) Calcula el área de tu salón.

7) Plantea y resuelve un problema de la vida cotidiana en donde apliques este tipo de proceso.

**4.** Calcula ángulos interiores, considerando el mapa, plano o croquis, aplicando la fórmula de pendientes.

1) Escribe en la forma simétrica y pendiente ordenada al origen la ecuación de la recta $4x + 3y + 18 = 0$.

2) Dada la ecuación $6x + 12y + 24 = 0$, encuentra la recta paralela que pasa por el punto (0,6).

3) Transforma la ecuación de la recta $3x + 4y - 15 = 0$ de la forma general a la forma normal.

4) Verifica que el triángulo formado por los puntos $A(4,-4)$, $B(4,4)$, $C(0,0)$, es triángulo rectángulo y encuentra los ángulos interiores.

5) Dados los siguientes tres puntos en el plano cartesiano: $P_1 = (4,1)$, $P_2 = (-4,1)$ y $P_3 = (0,5)$, calcula lo siguiente:

- Une los tres pares ordenados.

a) Perímetro.

b) Área.

c) Los ángulos interiores.

6) Tres bancas situadas en un parque forman un triángulo, con coordenadas (0,0),(3,5) y (4,2). ¿En qué punto del plano cartesiano debe colocarse una lámpara para que ilumine de igual magnitud a las tres bancas?

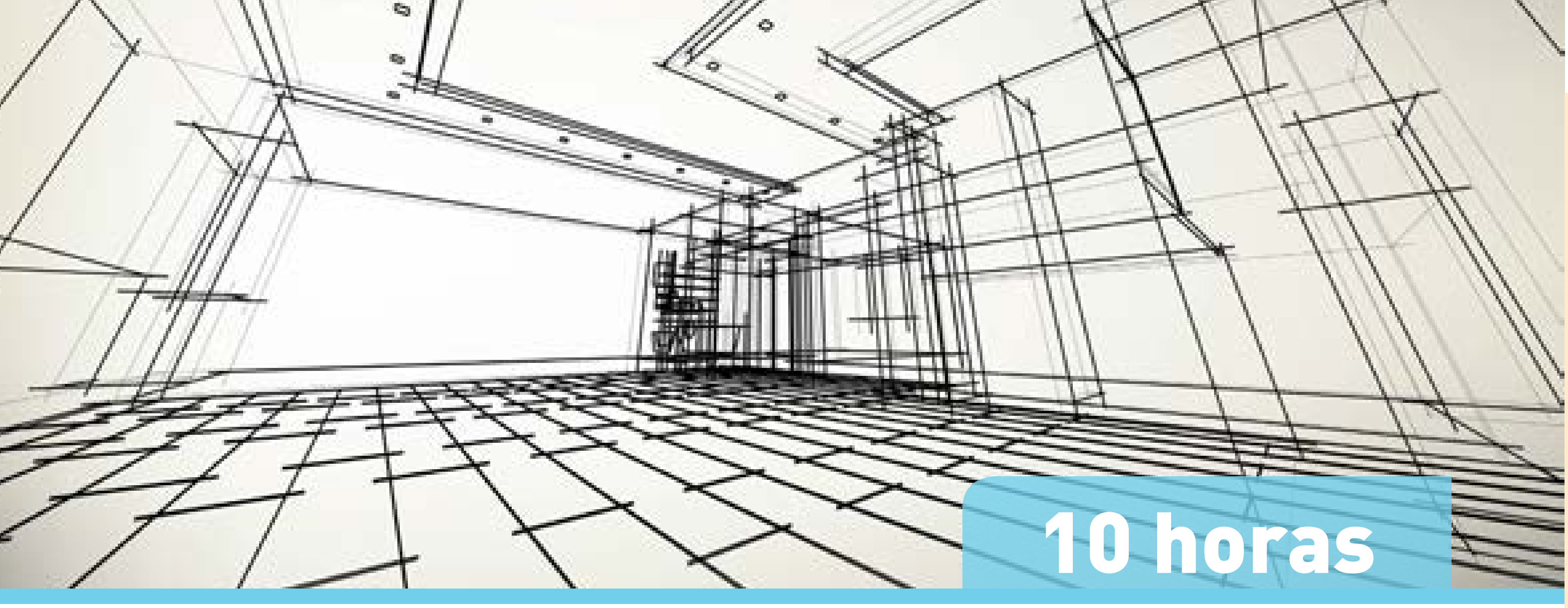
7) Realiza la medición de los ángulos del triángulo anterior utilizando transportador, y comprueba tus resultados.

8) Obtén la pendiente de las escaleras de tu plantel, aplicando definición de pendiente, calcule el ángulo de inclinación.

**5.** Pasa en limpio el trabajo realizado en los puntos 2, 3 y 4 de esta actividad, no olvides incluir su respectivo título. Incluye los procedimientos y métodos aplicados, junto con los resultados que obtuviste paso por paso. Realiza una portada en *Word* para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha, número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.

**6.** Antes de entregar tus resultados a tu profesor, realiza la Rúbrica 1.1.1, de tu "Autoevaluación 1.1.1" que se encuentra al final de esta unidad en la sección "Instrumentos de evaluación". Revisa si cumples con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de presentarlo.

**7.** Entrega tus resultados al profesor.



10 horas

# 1.2 Construcción de la ecuación de la recta y su representación gráfica a partir de los elementos que la integran

En la primera sección de esta unidad nos hemos concentrado en los puntos sobre el plano coordenado o cartesiano. Igualmente, se abordaron los temas del perímetro, el área de polígonos y de la distancia entre dos puntos en una recta y en el plano coordenado. Todos estos temas son de importante valor para esta sección, donde veremos más a fondo su aplicación.

## Actividad de inicio

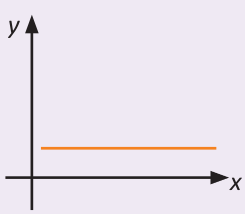
Dedicación

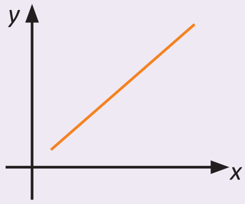
VALORES

TIC

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.<br>• **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. |

**1.** De manera individual, copia el siguiente cuadro en tu cuaderno y complétalo. Investiga en libros o en páginas de internet de ser necesario.

| Tipo de línea | Grafica | Objeto real |
|---|---|---|
| Línea recta horizontal |  |  |

| Tipo de línea | Grafica | Objeto real |
|---|---|---|
| Línea recta vertical |  | |
| Línea recta con pendiente a la derecha | | |
| Línea recta con pendiente a la izquierda | | |

**2.** Compara tu cuadro con otro compañero de grupo.

# Análisis de la pendiente de una recta

Al hablar de líneas rectas, con frecuencia se hace uso del concepto de pendiente. La pendiente es un valor que mide la inclinación de una recta, como una elevación o depresión de uno de sus extremos respecto de la horizontal imaginaria que pasa por su otro extremo. De esta manera, el concepto de pendiente queda vinculado al de línea recta al decir que una línea recta está "poco elevada", "muy empinada" o "más o menos caída". En geometría analítica, la pendiente es una razón o proporción entre su elevación (también llamada crecimiento) y su desplazamiento horizontal (conocido también como recorrido) medido de izquierda a derecha. Sin embargo, para comprender en profundidad el concepto de pendiente se requiere primero el de línea recta, que es el objetivo de la presente sección.

## Actividad de desarrollo

Laboriosidad

VALORES

TIC

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.<br>• **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. |
| ATRIBUTO | • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. |

**1.** En pareja, sigan las instrucciones y dibujen lo que se pide; de ser necesario consulten fuentes confiables como libros o internet.

- Dibujar una línea recta que toque el eje de las abscisas y las ordenadas pero no el origen del plano.
- Dibujar la función $y = 2x$, con $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

- De la gráfica anterior localizar los puntos *A* (1, 2) y *B* (4, 8). Después, con otro color, dibujar una línea que vaya del punto *A* (1, 2) al punto *C* (4, 2) y otra que vaya del punto *C* (4, 2) al punto *B* (4, 8).
- Dibujar cuatro rectas, de tal manera que no se crucen en ningún punto.
- Dibujar cuatro rectas, de tal manera que sólo se crucen en un punto.

**2.** Relacionen los dibujos que hicieron con las siguientes definiciones.

- Una recta es la representación gráfica de una función de primer grado.
- La diferencia entre $y_2$ y $y_1$ es el cambio en *y* o crecimiento de la recta.
- La diferencia entere $x_2$ y $x_1$ es el cambio en *x* o el recorrido de la recta.
- Dos rectas son perpendiculares si tienen un punto en común.
- Dos o más rectas en el mismo plano son paralelas si nunca se intersecan.

**3.** Entreguen sus resultados al profesor.

CURIOSIDADES

El signo o término $\Delta$ indica una diferencia. Por ejemplo, $\Delta y$ indica la diferencia de las ordenadas de dos puntos. El uso de este signo requiere saber sobre qué términos se está hablando.

## Definición

Una tarea importante cuando se estudia por primera vez algún tema es definir el o los conceptos principales. Con esto en mente, definamos el concepto de **recta**.

Una recta es la representación gráfica de una función de primer grado.

La definición anterior nos indica que una recta es toda función que contenga variables elevadas únicamente a la potencia 1.

Otro término que nos interesa, adicional al de la recta, es el de **pendiente**. La pendiente describe el nivel de inclinación que tiene una recta. En otras palabras, la pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas, también conocido como eje *x*.

Una vez definidos los conceptos de recta y pendiente podemos explorar más a fondo estos conceptos. La ecuación de la recta se representa a través de la siguiente ecuación:

$$y = mx + b$$

Donde:

- *b* es el coeficiente de posición. Este valor corresponde al punto de corte con el eje de las ordenadas o eje *y*.
- *m* indica la pendiente de la recta. Define el grado de inclinación de la recta.

Ilustraremos lo anterior a través del siguiente ejemplo: la ecuación $y = 8x + 56$ tiene una pendiente de valor 8 y un coeficiente de posición de 56. Con esta información podemos saber que la recta interceptará al eje *y*, o eje de las ordenadas, en el punto (0,56).

En el ejemplo anterior sólo tenemos determinado un punto; sin embargo, cuando se tienen dos puntos cualesquiera, como $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$, la pendiente queda determinada por el cociente entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas. En otras palabras:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

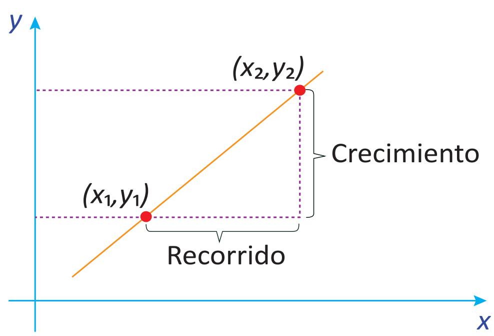


Figura 1.15. Crecimiento y recorrido.

Se acostumbra decir que $y_2 - y_1$ es el **cambio en** *y* o **crecimiento** de la recta; por su parte, $x_2 - x_1$ es el **cambio en** *x* o el **recorrido** de la recta. Por tanto, la pendiente de una recta se puede escribir de la siguiente forma:

$$m = \frac{\text{crecimiento}}{\text{recorrido}}$$

La **figura 1.15** ilustra los conceptos de crecimiento y recorrido en la pendiente de una recta. En dicha figura tenemos dos puntos, $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ con los cuales denotamos un segmento de recta con una pendiente específica. Sin embargo, a partir de cualesquiera dos puntos de dicha recta se puede determinar la misma pendiente.

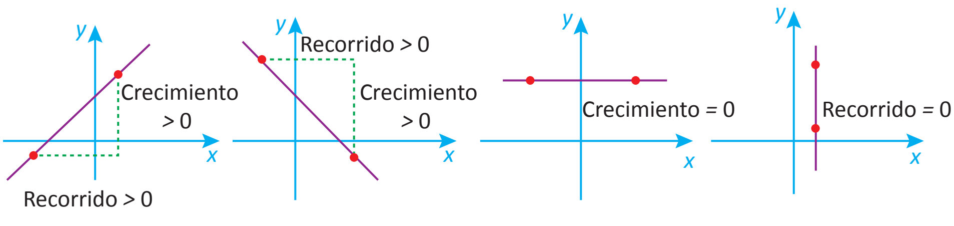
En la **figura 1.16** se ilustran las gráficas de rectas con pendiente positiva, negativa, cero e indefinida. Cuando la pendiente es positiva ($m > 0$), la recta se eleva conforme $x$ aumenta. Cuando la pendiente es negativa ($m < 0$), la recta desciende a medida que $x$ aumenta. Cuando $y_1 = y_2$, la pendiente es cero. Si $P_1$ y $P_2$ son puntos de una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y, en consecuencia, el recorrido es cero. En este caso, la pendiente de la recta es indefinida o la recta no tiene pendiente.

Ilustremos lo antes visto con un ejemplo: determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (–2,6) y (3–4). Para dar solución a este problema vamos a utilizar la fórmula de la pendiente cuando tenemos dos puntos cualesquiera; por lo tanto:

TIC

Para conocer una divertida historia sobre una línea recta que se enamora de un punto, ve el video *"The dot and the line: a romance in lower mathematics"* (El punto y la línea: un romance matemáticas básicas) que se encuentra en el siguiente enlace.

https://www.youtube.com/watch?v=7658p0lcX_Q




a) $m > 0$ b) $m < 0$ c) $m = 0$ d) $m$ indefinida

Figura 1.16. a)-c) Rectas con pendiente; d) recta sin pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-6}{3-(-2)} = \frac{-10}{5} = 2$$

Así, sabemos que la pendiente de la recta que pasa por los puntos(–2,6) y (3–4) tiene un valor de –2.

Otra manera de analizar la pendiente de una recta es a través del ángulo que forma con respecto al eje $x$ o de las abscisas. De esta manera, la pendiente se puede definir también como el ángulo menor que, mayor que o igual a cero grados, que forma la recta con la dirección positiva del eje $x$. De acuerdo con lo anterior, la inclinación $\theta$ de una recta es:

$$0° \le \theta < 180°$$

En la **figura 1.17**, la inclinación de la recta $l$ se indica mediante flechas curvas. $MX$ es el lado inicial y $ML$ es el lado terminal del ángulo.

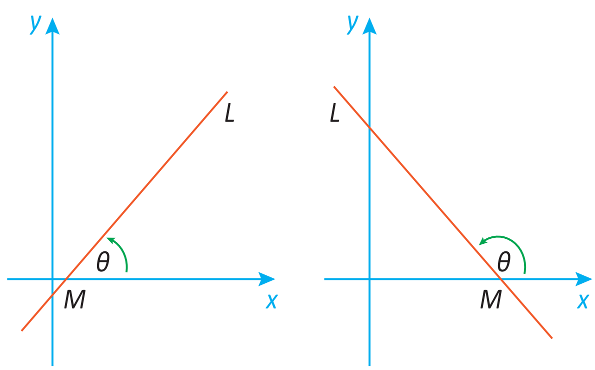



Figura 1.17. Pendiente de una recta.

Tomando en cuenta lo anterior es posible demostrar que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo de inclinación.

Si se conoce la inclinación de una recta, la pendiente se puede calcular usando una tabla de funciones trigonométricas. Recíprocamente, si se conoce la pendiente de una recta se puede determinar su inclinación.

De esta forma, la pendiente de una recta que pasa por los puntos $P_1$ $(x_1, y_1)$ y $P_2$ $(x_2, y_2)$ se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como se puede observar, el cálculo de la pendiente es idéntico al antes visto pero ahora considera el ángulo que forma con respecto al eje de las abscisas o eje $x$.

## Actividad de desarrollo

Laboriosidad

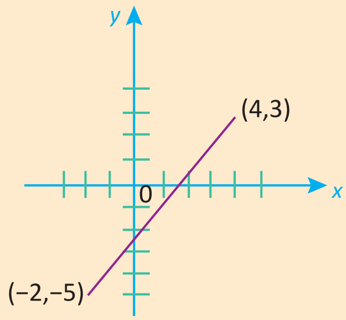
VALORES

TIC

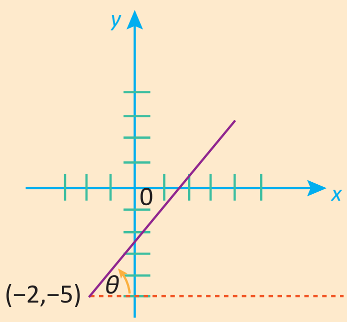
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. |

**1.** En equipo de cinco integrantes, pongan en práctica lo aprendido. Para ello, resuelvan el siguiente conjunto de ejercicios.

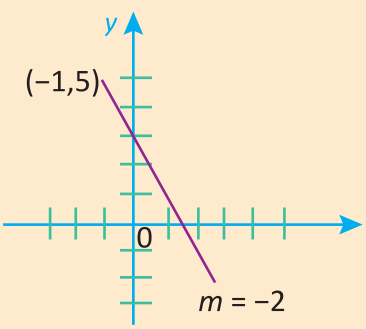
1) Hallar la ecuación de la recta de la siguiente figura.




2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A$ (–2, –5) y tiene un ángulo de 45°, como se muestra en la siguiente figura.




3) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A$ (–1, 5) y tiene como pendiente $m = -2$.




4) ¿Dónde quedan situados los puntos que tienen la abscisa igual a la ordenada? Da tu respuesta y dibuja en tu cuaderno la gráfica resultante.

5) Tres vértices de un rectángulo son $A$ (–5, 2), $B$ (5, 2) y $C$ (–5, 6). ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice, y cuál es su perímetro y su área? Dibuja en tu cuaderno el rectángulo, con los vértices correspondientes, en un plano cartesiano.

**2.** Comparen sus respuestas con otro equipo y corríjanlas de ser necesario.

# Ángulo entre rectas

Cuando dos rectas se intersecan, éstas forman dos pares de ángulos iguales. Sin embargo, el ángulo de un par es el suplemento del ángulo del otro par. En la **figura 1.18** se observa cómo el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos no adyacentes a éste.

De la figura 1.18 se advierte que:

$$\phi + \theta_1 = \theta_2, \text{ o } \phi = \theta_2 - \theta_1$$

Si $m_2 = \tan\theta_2$ y $m_1 = \tan\theta_1$, se tiene que:

$$\tan\Phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

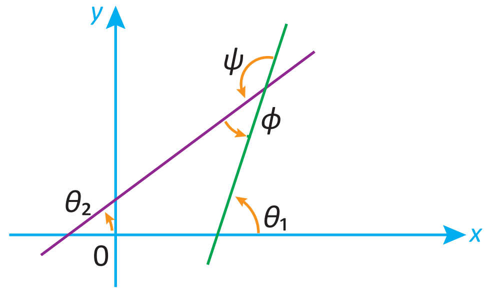
El ángulo exterior $\psi$ de la figura 1.18 es suplementario al ángulo $\theta$, entonces:

$$\tan\Psi = -\tan\Phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

**Teorema 1.2**: Si $\phi$ es un ángulo entre dos rectas, medido en dirección contraria a las manecillas del reloj, entonces

$$\tan\Psi = -\tan\Phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

A $m_2$ se le llama la pendiente del lado terminal y $m_2$ es la pendiente del lado inicial.




$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Figura 1.18. Cálculo del ángulo exterior de un triángulo.

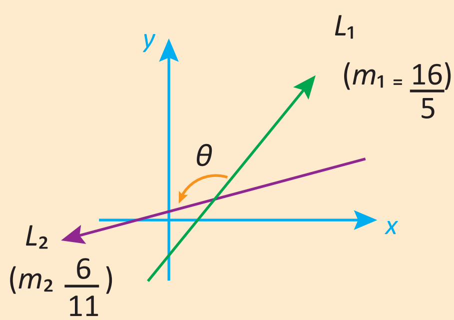
## Actividad de desarrollo

Dedicación

VALORES

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. |

1. De forma individual, practica lo que has aprendido hasta el momento. Para ello, resuelve los siguientes ejercicios.
   1) Dadas las rectas $j$: $3x + y - 1 = 0$ y $k$: $2x + my - 8 = 0$, determina $m$ para que formen un ángulo de 45º.
   2) Halla la medida del ángulo $\theta$, el cual se encuentra formado por dos rectas cuyas pendientes son $\frac{6}{11}$ y $\frac{16}{5}$, como se muestra en la siguiente imagen.




   3) Calcula el ángulo agudo formado por dos rectas cuyas pendientes son –2 y 3.
2. Entrega tus resultados al profesor.

# Triángulo

Un triángulo es un polígono compuesto por tres ángulos interiores, cuya suma es siempre igual a 180º.

Triángulos se clasifican según sus ángulos en:

- **Triángulos acutángulos** son los que tienen sus tres ángulos agudos (menor a 90º).
- **Triángulos rectángulos** son los que tienen un ángulo recto (igual a 90º).
- **Triángulos obtusángulos** son los que tienen un ángulo obtuso (mayor a 90º).

Otra clasificación de los triángulos con respecto a la medida de sus lados es:

- **Triángulos equiláteros** son los que tienen sus tres lados iguales entre sí.
- **Triángulos isósceles** son los que tienen al menos dos lados iguales entre sí.
- **Triángulos escalenos** son los que no tienen lados iguales entre sí.

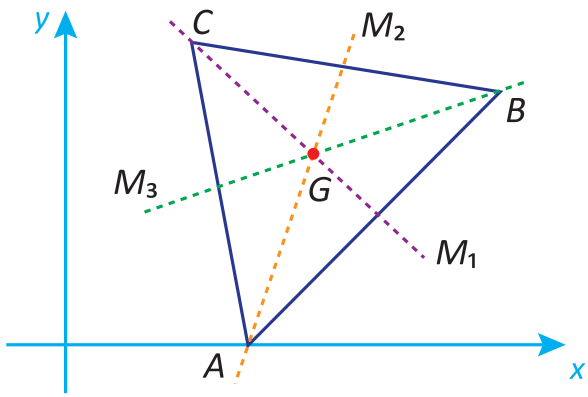



Figura 1.19. Medianas del triángulo.

# Rectas notables

Para comenzar el análisis de los elementos de las rectas notables analizaremos la **figura 1.19**.

Las líneas discontinuas de la figura corresponden a las **medianas** del triángulo y por definición, son aquellas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto a ese vértice.

Como se puede observar, un triángulo posee tres medianas, las cuales se cortan en un punto medio llamado **baricentro** (en la figura denotado por $G$).

Las coordenadas del baricentro se calculan mediante las coordenadas de cada vértice. Así, por ejemplo, si las coordenadas de los vértices de un triángulo cualquiera son $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$, las coordenadas de $G$ son:

$$G:\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{2},\frac{a_2+b_2+c_2}{2}\right)$$

**Ejemplo:**

Las coordenadas que representan a cada una de las casas de tres alumnos son: $A(1, 0)$, $B(5, 3)$ y $C(3, 6)$, respectivamente. Se quiere encontrar un lugar común para todos que corresponda al centro de gravedad $G$ del triángulo formado por $A$, $B$ y $C$.

- ¿Cuáles son las coordenadas de $G$?
- Determina las ecuaciones de las medianas del triángulo $ABC$.

Antes de comenzar es recomendable trazar el gráfico, el cual ayudará en la solución. En este caso, el gráfico se presenta al final de la solución a través de la **figura 1.20.**

- Aplicamos la fórmula para el cálculo de las coordenadas del baricentro y obtenemos lo siguiente:

$$G:\left(\frac{1+5+3}{3},\frac{0+3+6}{3}\right)=(3,3)$$

- Las ecuaciones de las medianas pueden calcularse ahora para cada vértice mediante la forma dos puntos de la ecuación de la recta (punto $G$ y el vértice) como:
  - Mediana $M_1$ (pasa por $G(3, 3)$ y el vértice $C(3, 6)$).
    En este caso, como $x_1 = x_2 = 3$, la forma dos puntos no pude usarse y la recta que corresponde a la mediana tiene la forma $x = 3$

    $M_1: x - 3 = 0$ Paralela al eje $y$
  - Mediana $M_2$ (pasa por $G(3, 3)$ y el vértice $A = (1, 0)$).
    Aplicando la forma dos puntos, tenemos:

$$(y-3)=\frac{3-0}{3-1}(x-3)$$

$$(y-3)=\frac{3}{2}(x-3)$$

$$2y-6=3x-9$$

$$M_2: 3x-2y-3=0$$

NO ABANDONO

"Puede que debas pelear una batalla más de una vez para ganarla".
Margaret Thatcher

– Mediana $M_3$ (pasa por $G(3, 3)$ y el vértice $B(5, 3)$).
Aplicando la forma de dos puntos obtenemos:

$$(y-3)=\frac{3-3}{3-5}(x-3)$$

$$(y-3)=\frac{0}{2}(x-3)$$

$M_3$: $y - 3 = 0$ Paralela al eje $x$

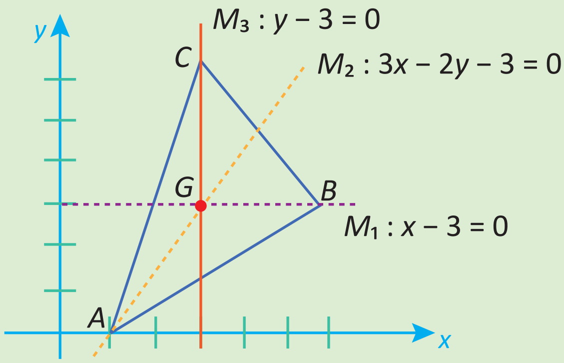



Figura 1.20. Cálculo de las medianas del triángulo.

Al igual que como sucede con la mediana, todo triángulo cuenta con tres alturas. La **altura** de un triángulo nos permite, entre otras cosas, calcular su área. La altura de triángulo se obtiene trazando rectas perpendiculares desde cada vértice a su lado opuesto. Como se muestra en la **figura 1.21**, donde las alturas se encuentran representadas como: $H_1$, $H_2$ y $H_3$.

Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro** del triángulo (punto $H$ en la figura)

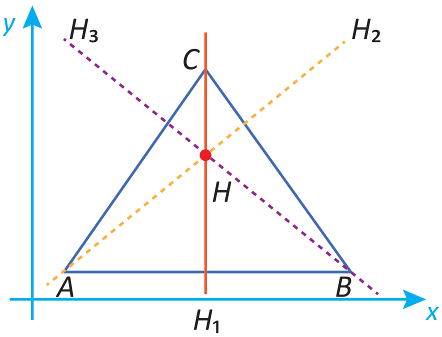



Figura 1.21. Alturas del triángulo.

**Ejemplo:**

Considera un triángulo cuyos vértices son: $A(1, 2)$, $B(3 - 1)$ y $C(5, 4)$

- ¿Cuál son las coordenadas del ortocentro?
- ¿Cuál es la altura del triángulo?

Primero se dibuja el triángulo en un plano cartesiano, como se muestra en la **figura 1.22.**

Las ecuaciones de las alturas están dadas por las rectas perpendiculares a cada lado que pasa por el vértice opuesto; así, al hallar las pendientes de cada lado, indirectamente, estaremos determinando las pendientes de las ecuaciones de las alturas. Con las coordenadas de cada vértice y usando la forma punto-pendiente, obtendremos las ecuaciones buscadas.

$$\text{Pendiente } AB=\frac{2-(-1)}{1-3}=-\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente } BC=\frac{-1-4}{3-5}=\frac{5}{2}$$

$$\text{Pendiente } CA=\frac{4-2}{5-1}=\frac{1}{2}$$

Luego, por la condición de perpendicularidad, tenemos que:

$$\text{Pendiente } H_1=\frac{-1}{\text{Pendiente } AB}=\frac{2}{3}$$

$$\text{Pendiente } H_2=\frac{-1}{\text{Pendiente } BC}=-\frac{2}{5}$$

$$\text{Pendiente } H_3=\frac{-1}{\text{Pendiente } CA}=-2$$

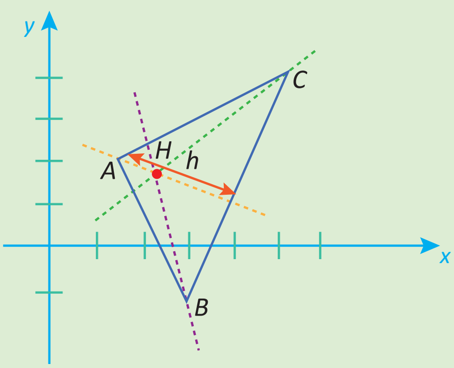



Figura 1.22. Cálculo de alturas del triángulo.

Mediante la fórmula punto pendiente determinamos las ecuaciones de las alturas como:

Ecuación $H_1$: $(y-4)=\frac{2}{3}(x-5)$

$3y-12=2x-10$

$2x-3y+2=0$

Ecuación $H_2$: $(y-2)=-\frac{2}{5}(x-1)$

$5y-10=-2x+2$

$2x+5y-12=0$

Ecuación $H_3$: $(y-(-1))=-2(x-3)$

$y+1=-2x+6$

$2x+y-5=0$

Las coordenadas del ortocentro se determinan resolviendo el sistema de cualesquiera dos de las ecuaciones de las alturas, al ser el ortocentro el punto de intersección de las tres rectas. Si, por ejemplo tomamos $H_1$ y $H_2$ tenemos:

$H_1$: $2x-3y+2=0$

$H_2$: $2x+5y-12=0$

$-8y+14=0$ resta $H_1-H_2$

$y=\frac{7}{4}$

$2x-3\left(\frac{7}{4}\right)+2=0$ Sustituyendo $y=\frac{7}{4}$ en $H_1$

$2x-\frac{13}{4}=0$

$x=\frac{13}{8}$

Las coordenadas de H son $\left(\frac{13}{8},\frac{7}{4}\right)$. Puedes comprobar tus resultados en $H_3$.

Para determinar la altura del triángulo, es necesario aplicar los conocimientos que tienes de área. Sabes que:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & 5 & 4\end{vmatrix}=\frac{12-1+10-6-4+5}{2}=\frac{16}{2}=8u^2$$

También se sabe que:

$$A=\frac{1}{2}bh$$

Por lo tanto

$$h=\frac{2A}{b}=\frac{2(8)}{b}=\frac{16}{b}\text{ unidades}$$

A continuación, como cada lado del triángulo corresponde a un valor de la base $b$, hallamos para cada uno de los valores de $h$ (altura). Por la fórmula de distancia entre dos puntos, tenemos que:

$$b_1=d\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{11}\text{ unidades}$$
$$b_2=d\overline{AB}=\sqrt{(3-5)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}\text{ unidades}$$
$$b_3=d\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}\text{ unidades}$$

Luego, calculamos cada una de las alturas:

$$h_1=\frac{16}{\sqrt{11}}=\frac{16\sqrt{11}}{11}\approx 4.82\text{ unidades}$$
$$h_2=\frac{16}{\sqrt{29}}=\frac{16\sqrt{29}}{29}\approx 2.97\text{ unidades}$$
$$h_3=\frac{16}{\sqrt{20}}=\frac{16\sqrt{20}}{20}\approx 3.57\text{ unidades}$$

Para efectos de geometría elemental, la altura $h$ del triángulo es aproximadamente de 2.97 unidades.

# Mediatriz

La **mediatriz** de un segmento *AB* es la perpendicular al segmento que pasa por el punto medio. Geométricamente, todos los puntos de la mediatriz equidistante de los extremos del segmento, como se observa en la **figura 1.23**.

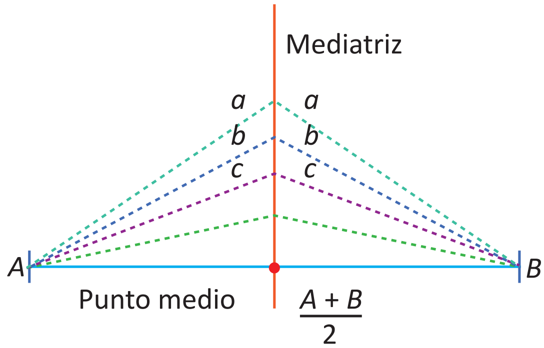



Figura 1.23. Mediatriz del triángulo.

En un triángulo las mediatrices pasan perpendicularmente por el punto medio de cada uno de sus lados y se cortan en un punto llamado **circuncentro**, como se puede observar en la **figura 1.24**, donde las mediatrices se encuentran representadas por líneas discontinuas.

El circuncentro, como se aprecia, corresponde al centro de la circunferencia circunscrita (exterior o que contiene) al triangulo equidistante de cada uno de los vértices del mismo.

Se deben considerar los siguientes casos: si el triángulo es un obtusángulo el circuncentro se encuentra fuera del triángulo. Si por el contrario, el triángulo es un triángulo rectángulo, el circuncentro se encuentra en el lado contrario al vértice donde se forma el ángulo recto, es decir, en la hipotenusa.

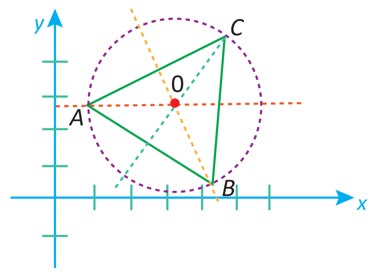



Figura 1.24. Circuncentro del triángulo

**Ejemplo:**

Determina la ecuación de las mediatrices y el circuncentro del triángulo formado por los vértices *A* (–2, 1), *B* (4, 7) y *C* (6, –3).

Primero trazamos el triángulo en un plano cartesiano como se muestra en la **figura 1.25.**

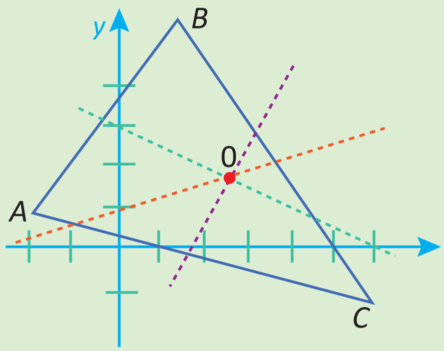



Figura 1.25. Cálculo de las mediatrices del triángulo.

Las pendientes de cada mediatriz se determinan mediante las pendientes de cada lado, ya que ambas son perpendiculares entre sí, de la siguiente manera:

$$m_{AC}=\frac{1-(-3)}{-2-6}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$m_{CB}=\frac{-3-7}{6-4}=-\frac{10}{2}=-5$$

$$m_{BA}=\frac{7-1}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$$

Luego, las pendientes de las mediatrices son:

$$m_1=\frac{-1}{m_{AC}}=\frac{-1}{(-1/2)}=2$$

$$m_2=\frac{-1}{m_{CB}}=\frac{-1}{(-5)}=\frac{1}{5}$$

$$m_3=\frac{-1}{m_{BA}}=\frac{-1}{1}=-1$$

Por otra parte, sabemos que las mediatrices pasan por el punto medio de los lados que tiene como coordenadas:

$$\text{Puntomedio } AC\text{: } \frac{-2+6}{2},\frac{1-3}{2}=(2,1)$$

$$\text{Puntomedio } CB\text{: } \frac{6+4}{2}, \frac{-3+7}{2} = (5,2)$$

$$\text{Puntomedio } BA\text{: } \frac{4-2}{2}, \frac{7+1}{2} = (1,4)$$

Ahora, mediante la forma punto-pendiente se pueden escribir las ecuaciones de las mediatrices como:

Mediatriz 1: $(y-(-1)) = 2(x-2)$

$$y + 1 = 2x - 4$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Mediatriz 2: $(y-2) = \frac{1}{5}(x-5)$

$$5y - 10 = x - 5$$

$$x - 5y + 5 = 0$$

Mediatriz 3: $(y-4) = -1(x-1)$

$$y - 4 = -x + 1$$

$$x + y - 5 = 0$$

Las coordenadas del circuncentro se encuentran resolviendo el sistema de cualesquiera dos ecuaciones de las mediatrices. En este caso consideremos la de la mediatriz 1 y la mediatriz 3:

$$2x - y - 5 = 0$$

$$x + y - 5 = 0$$

$$3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Sustituyendo $x = \frac{10}{3}$ en la ecuación de mediatriz 3

$$\frac{10}{3} + y - 5 = 0$$

$$y - \frac{5}{3} = 0$$

$$y = \frac{5}{3}$$

Puedes comprobar los resultados en la ecuación de la mediatriz número 2. Por lo tanto, las coordenadas del circuncentro son $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

CURIOSIDADES

El símbolo $\parallel$ indica paralelismo entre dos rectas, así que $A \parallel B$ indica que la recta $A$ es paralela a la recta $B$. Por otro lado, en geometría el símbolo $\perp$ indica que dos rectas son perpendiculares entre sí.

# Paralelismo y perpendicularidad

Dos rectas son **paralelas** cuando sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición distintos, esto es, si tenemos que:

$$L_1\text{: } y = m_1x + b_1 \text{ y } L_2\text{: } y = m_2x + b_2$$

$L_1 \parallel L_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$

Por ejemplo, las rectas $y = 6x + 11$; $y = 6x - 8$ son paralelas. Lo expuesto anteriormente da pie al siguiente teorema sobre paralelismo entre rectas.

**TEOREMA 1.3:** Dos rectas no verticales son paralelas si, y sólo si, sus pendientes son iguales.

Una forma de saber si dos rectas son **perpendiculares** es si una de las rectas es paralela al eje $x$ y la otra al eje $y$. La pendiente paralela al eje $x$ es cero, pero la recta paralela al eje $y$ no tiene pendiente. Si las rectas no coinciden con los ejes coordenados basta con calcular el producto de sus pendientes y obtener un resultado igual a –1; esto es, si tenemos que:

$$L_1\text{: } y = m_1x + b_1 \quad \text{y} \quad L_2 = m_2x + b_2$$

$L_1 \perp L_2$ si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$. Por ejemplo, si $L_1$:$y = -4x + 12y$ y $L_2: y = \frac{1}{4}x - 23$, entonces $L_1 \perp L_2$ debido a que $-4 \cdot \frac{1}{4} = -1$

## Actividad de desarrollo

Disciplina

VALORES

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. |

**1.** De manera individual, realiza los siguientes ejercicios.

1) Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta $r \equiv x + 3y - 5 = 0$, y que además pasa por el punto $A(4, 5)$.

2) Hallar la ecuación de la recta $s$ que es perpendicular a $r \equiv x + 2y + 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(3, 5)$.

3) Calcular la ecuación de la recta paralela a la recta $r \equiv 5x + 8y - 12 = 0$, y que además dista seis unidades del origen.

4) Calcular la distancia entre las siguientes rectas paralelas, $r \equiv x + 2y + 4 = 0$ y $s \equiv 2x + 4y - 5 = 0$.

5) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $r \equiv 5x - 7y + 12 = 0$ y que dista cuatro unidades del origen.

**2.** Compara tus resultados con un compañero, corrígelos de ser necesario y entrega tus respuestas a tu profesor.

# Familia de rectas

Las ecuaciones de la recta se pueden expresar de la siguiente forma:

$$y = mx + b \quad \text{o} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Las constantes de la primera ecuación son $m$ y $b$. Estas constantes son importantes porque, una vez que se les asigne un determinado valor, la recta quedará completamente definida. A estas constantes se les conoce como **parámetros**. De manera análoga, los parámetros para la segunda ecuación son $a$ y $b$.

Una ecuación lineal con un parámetro representa diferentes rectas, todas con una propiedad particular. Por ejemplo, la ecuación $y = 3x + b$ representa una recta con pendiente igual a 3 y ordenada al origen igual a $b$. Generalmente, $b$ es un parámetro que puede tomar cualquier valor real. Como ya hemos visto, dado que la pendiente es la misma para cualquier valor de $b$, la ecuación representa un conjunto de rectas paralelas. De esta manera, la cantidad total de rectas así determinadas se denominan **familia** de rectas. De hecho, por cada punto del plano coordenado pasa una recta de la familia. Veamos un ejemplo considerando la siguiente ecuación:

$$2x - 3y = k$$

La ecuación $2x - 3y = k$ representa la familia de rectas con pendiente de $\frac{2}{3}$. El resultado anterior se obtiene al despejar $y$. Por tanto, al variar $k$ se representa una familia de rectas paralelas, tal como se propuso.

Veamos otro ejemplo analizando la familia de rectas representadas por la siguiente ecuación:

$$y - 2 = m(x - 4)$$

Esta es la ecuación de una familia de rectas que pasan por el punto (4, 2). La familia está formada por todas las rectas que pasan por este punto, excepto la recta vertical pues no hay valor alguno para el parámetro $m$ que dé una recta vertical. La **figura 1.26** presenta varias de las rectas de esta familia.

NO ABANDONO

"Siempre parece imposible hasta que está hecho".

Nelson Mandela

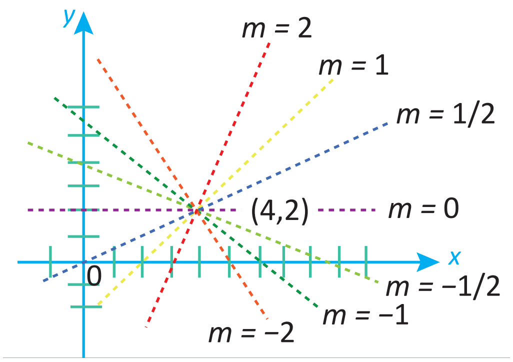



Figura 1.26. Familia de rectas con ecuación $y - 2 = m(x - 4)$.

NO ABANDONO

"Todos nuestros sueños se pueden hacer realidad si tenemos el coraje de seguirlos".
Walt Disney

Consideremos ahora un caso distinto: se desea escribir la ecuación de la familia de rectas que son paralelas a la recta $5x + 12y + 7 = 0$ y que, además están a tres unidades del punto (2, 1). Como ya sabemos, para que dos rectas sean paralelas, éstas deben tener la misma pendiente y diferente coeficiente de posición. Entonces, la familia de rectas es $5x + 12y + C = 0$, donde $C$ puede tomar cualquier valor. Sin embargo, existe la restricción de que la familia de rectas debe pasar a tres unidades de distancia del punto (2, 1). Usando la fórmula para la distancia de una recta a un punto se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{5(2)+1281)+C}{13}=3 \qquad \frac{5(2)+12(1)+C}{13}=-3$$

Las raíces de estas ecuaciones son $C = 17$ y $C = -61$. Por consiguiente, las ecuaciones solicitadas son:

$$5x+12y+17=0 \qquad 5x+12y-61=0$$

De igual modo, resulta importante saber cómo calcular la familia de rectas que pasa por el punto de intersección de dos rectas dadas. Para lo anterior, considera las siguientes ecuaciones:

$$2x-3y+5=0 \qquad 4x+y-11=0$$

Reuniendo cada miembro izquierdo de las ecuaciones se forma la siguiente expresión:

$$(2x-3y+5)+k(4x+y-11)=0$$

donde $k$ es un parámetro. Aunque la ecuación parezca muy grande, ésta sigue siendo de primer grado. Cada recta de la familia pasa por la intersección de las rectas dadas.

En términos generales, sean las ecuaciones de dos rectas que se intersecan:

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

Entonces la ecuación:

$$(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

representa una familia de rectas que pasan por la intersección de las rectas dadas.

## Problemas de aplicación

A continuación se presenta una serie de problemas donde la ecuación de la recta juega un papel principal.

**Problema 1:**

Una tienda de cómputo vendió 20 memorias USB en un mes cada una con el precio de \$150. Cuando se fijó el precio en \$200 vendió solo 15. Estima la ecuación de demanda suponiendo que existe una relación lineal entre la demanda, $q$, y el precio, $p$.

Primero se debe verificar si se puede usar la ecuación de la recta. Lo cual sabemos que es posible ya que la ecuación de la demanda es lineal.

Después establecemos las variables:

$p$: Precio de cada DVD

$q$: Cantidad demandada.

Consideramos la cantidad $q$ como la variable de la abscisa y la cantidad $p$ como la de la ordenada, tal como se representan en el plano cartesiano ($q$, $p$).

Ahora sustituimos los valores que se nos otorgan del enunciado en nuestras variables.

$$(q_1, p_1) = (20, 150)$$
$$(q_2, p_2) = (15, 200)$$

Después, establecemos las pendientes de la recta, teniendo cuidado de que el precio representa el coeficiente de la variable *y*

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$$

$$m = \frac{200 - 150}{15 - 20} = -10$$

Por ultimo calculamos la ecuación con la pendiente y uno de los dos puntos, usando la forma punto-pendiente. Escribimos la forma punto-pendiente de la siguiente manera:

$$p - p_0 = m(q - q_0)$$
$$p - 150 = -10(q - 20)$$
$$p = -q + 350$$

**Problema 2:**

Las reservas probadas de un mineral en cierto país actualmente son de 12.5 millones de toneladas. Si la explotación se mantiene constante en 20 000 toneladas al mes y no hay nuevas exploraciones que aumenten las reservas probadas. ¿En cuánto tiempo se acabarán las reservas?

Establecemos la variable dependiente

*y*: cantidad de reservas de mineral.

*t*: tiempo

Recordemos que debemos trabajar con una única unidad de medida de la cantidad de reservas de mineral. En este caso, mediremos la cantidad de reservas en millones de toneladas al mes. Por lo tanto, la cantidad –20 000 toneladas al mes representa la razón de cambio de las reservas en toneladas por mes. Expresamos esta cantidad en millones de toneladas por mes, así m = – 0.02 millones de toneladas por mes.

Para conseguir la ecuación de la recta hace falta un punto (*t, y*). Como hay 12.5 millones en la actualidad, tomamos ésta como la coordenada y de las reservas, y como el tiempo es medido a partir de los momentos actuales, entonces la coordenada t es igual a 0. Así, la recta pasa por (0, 12.5).

Para encontrar la ecuación de la recta se puede usar la ecuación punto-pendiente o la ecuación pendiente-ordenada en el origen pues 12,5 es la ordenada en el origen. Usamos la segunda:

$$y = mt + b$$

Al sustituir se obtiene:

$$y = -0.02t + 12.5 \text{ millones de toneladas}$$

Se acabarán las reservas cuando $y = 0$

Sustituimos este valor en la ecuación encontrada en la ecuación anterior:

$$0 = -0.02t + 12.5$$

Se despeja *t*:

$$t = \frac{12.5}{0.02} = 625 \text{ meses}$$

Esta cantidad de meses equivale a 52 años.

NO ABANDONO

"Vive como si fueses a morir mañana.
Aprende como si fueses a vivir siempre".
Mahatma Gandhi

# Representación matemática y graficación de la recta

En las secciones anteriores se han estudiado algunas propiedades de la recta. En este punto es posible plantear diferentes formas de su ecuación. El propósito de esta sección es desarrollar estas diversas ecuaciones, puesto que cada una tiene diferentes ventajas al considerar los problemas que involucran líneas rectas. Sin embargo, en todos los casos trabajaremos con ecuaciones de primer grado.

A pesar de su sencillez, la recta es un concepto esencial en matemáticas, y se presenta continuamente en la experiencia diaria de manera útil e interesante. En el estudio de la recta se descubrió primero una correspondencia entre una recta y una ecuación de primer grado. Además, la ecuación de una recta puede expresarse en diferentes formas, tales que cada una exhibe cierta propiedad geométrica de la recta.

## Ecuación punto-pendiente

Después de los temas vistos se tienen las condiciones necesarias para plantear la ecuación de una recta $L$. Para empezar, considera que $L$ tiene pendiente $m$ y que $P_1(x_1, y_1)$ es un punto que está en dicha recta. Si $P(x, y)$ representa cualquier otro punto en la misma recta, entonces:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Ahora bien, si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $x-x_1$ se obtiene la ecuación punto-pendiente de la recta $L$.

**TEOREMA 1.4:** La ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m$ es:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Para ilustrar este teorema veamos el siguiente ejemplo: encontrar la ecuación de la recta que pasa por $\left(-\frac{1}{2},2\right)$, con $m$ = 6. Según la información que se proporciona sabemos que la pendiente tiene un valor de 6 ($m$ = 6), que $x_1=-\frac{1}{2}$ y que $y_1$ = 2. A partir de la ecuación punto-pendiente obtenemos:

$$y-2=6\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

Simplificando lo anterior, se llega a lo siguiente:

$$y-2=6\ x+\frac{1}{2}$$

$$y=6x+5$$

Así, se puede observar el uso de la ecuación punto-pendiente para la encontrar la ecuación de una recta si conocemos un punto y la pendiente de la misma.

## Ecuación punto-punto

La ecuación punto-punto se define a partir de dos puntos dados de una recta $L$.

Geométricamente, una recta se puede determinar a partir de dos de sus puntos, cualesquiera que éstos sean. De manera análoga, la ecuación de la recta también queda determinada por completo conociendo las coordenadas de dos puntos cualesquiera que pertenezcan a ella.

**TEOREMA 1.5:** La recta que pasa por dos puntos dados, $P_1$ $(x_1, y_1)$ y $P_2$ $(x_2, y_2)$, tiene por ecuación:

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \qquad x\neq x_2$$

Si $x_1 = x_2$ , la ecuación anterior no puede usarse, pues en este caso la recta es paralela al eje $y$ o de las ordenadas, con lo que su ecuación es simplemente $x = x_1$.

Como ejemplo para este tema consideremos determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1$(1, 2) y $P_2$(3, 4). Considerando el teorema 1.5 tenemos:

$$(y-2)=\frac{(2-4)}{(1-3)}(x-1)$$

$$(y-2)=\frac{-2}{-2}(x-1)$$

$$(y-2)=(x-1)$$

$$x-y+1=0$$

Por tanto, la ecuación de la recta buscada es $x - y + 1 = 0$.

TIC

En el video “REFU 1.1.D.2 Ecuación punto-punto” conocerás más sobre el tema de la ecuación punto-punto.

https://www.youtube.com/watch?v=yZmUhgEQsnI

# Ecuación pendiente-ordenada al origen

Consideremos una recta $L$ como en la **figura 1.27**, cuya pendiente es $m$ y cuya ordenada en el origen, es decir, su intersección con el eje $y$, es $b$. Dado que se conoce el valor de $b$, el punto de coordenadas $(0, b)$ está sobre la recta. Con estos datos, el problema se reduce a encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, b)$ y tiene una pendiente $m$. Entonces:

$$y - b = m\,(x - 0)$$

Esto es:

$$y = mx + b$$

**TEOREMA 1.6:** La recta cuya pendiente es $m$ y cuya ordenada en el origen es $b$ tiene por ecuación:

$$y = mx + b$$

Una recta paralela al eje $y$ no tiene ordenada en el origen. Por esta razón, no se puede usar la forma de la ecuación que menciona el teorema 1.6.

Veamos el siguiente ejemplo: determina la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = 2$ y corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, 3)$. Para comenzar, consideraremos que $b = 3$. Partiendo del teorema 1.6 tenemos que:

$$y = mx + b$$
$$y = 2x + 3$$

Así, el resultado que buscamos está dado por la ecuación $y = 2x + 3$.

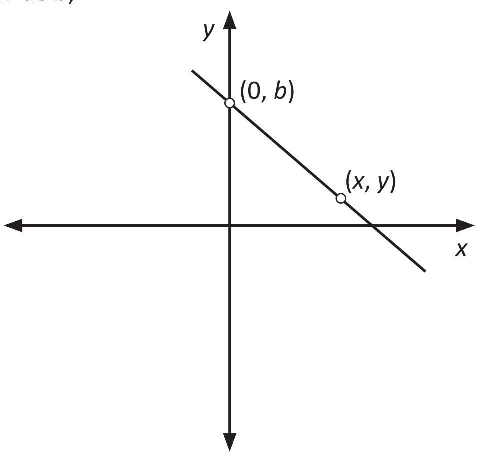



Figura 1.27. Ecuación pendiente ordenada al origen.

# Ecuación simétrica

Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los segmentos de una recta determinada sobre los ejes de las abscisas y ordenadas, es decir, sus intercepciones con los ejes, tal y como se muestra en la **figura 1.28.** Entonces $(a, 0)$ y $(0, b)$ son dos puntos de la recta y el problema de obtener la ecuación de la recta cuando se conocen los segmentos determinados sobre los ejes de las abscisas y de las ordenadas se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. En consecuencia:

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a)$$

De esta última expresión se obtiene:

$$ay = -bx + ab$$

Al transponer $-bx$ al primer miembro y dividiendo por $ab$, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

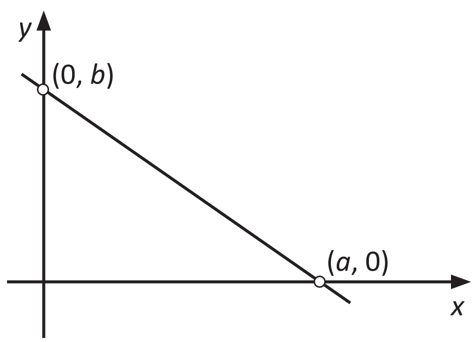



Figura 1.28. Ecuación simétrica.

Esta última ecuación es conocida como la ecuación simétrica de la recta.

**TEOREMA 1.7:** La recta cuyas intercepciones con los ejes de las abscisas y de las ordenadas son $a \neq 0$ y $b \neq 0$, respectivamente, tiene por ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Si $a = 0$, entonces también $b = 0$ y la forma simétrica no puede usarse. En este caso sólo se conocería un punto, el origen, y éste no es suficiente para determinar una recta.

Veamos lo anterior a través del siguiente ejemplo: hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos$(0, -2)$ y $(5, 2)$. Dado que se conoce un punto de la recta requerida $L$ (**figura 1.29**), solamente se necesita su pendiente y, de acuerdo con la información proporcionada, es la misma que la de la recta paralela $L'$ que pasa por los puntos antes mencionados. La pendiente de la recta $L'$ es entonces:

$$m = \frac{2 - (-2)}{5 - 0} = \frac{4}{5}$$

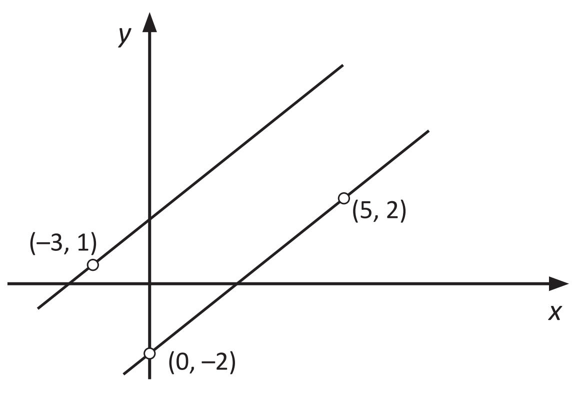



Figura 1.29. Ejemplo de la ecuación simétrica.

NO ABANDONO

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida".

John von Neumann

Por tanto, la ecuación de $L$ es:

$$y-1=\frac{4}{5}(x+3)$$
$$4x-5y+17=0$$

# Ecuación general de la recta

Los casos presentados deben mostrar que la ecuación de una recta cualquiera es de primer grado, es decir:

$$Ax + By + C = 0$$

Las constantes $A$ y $B$ deben ser diferentes de cero, mientras que $C$ puede o no ser nula. Resulta que la ecuación antes mencionada se conoce como la forma general de la ecuación de una recta.

Sin embargo, queda la duda de si la ecuación anterior representa siempre una línea recta. Para abordar este cuestionamiento examinaremos las dos formas posibles de la ecuación general con respecto al coeficiente de $y$, esto es, cuando $B = 0$ y cuando $B \neq 0$.

Comencemos con el caso en el que $B = 0$. Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ y la ecuación general se reduce a lo siguiente:

$$x=-\frac{C}{A}$$

Esta ecuación es de la forma $x = k$, la cual denota la ecuación de una recta paralela al eje de las ordenadas o eje $y$.

Analicemos ahora el caso cuando $B \neq 0$. Como $B$ es no nulo, podemos dividir la ecuación general entre $B$, por lo que obtenemos:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

Esta última ecuación resulta más familiar debido a que tiene la forma $y = mx + b$ y, por tanto, es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-\frac{A}{B}$ y cuya ordenada al origen es $-\frac{C}{B}$.

En resumen, se puede observar que, en todos los casos, la ecuación general propuesta representa una recta.

Combinemos lo expuesto con un ejemplo: hallar los valores de los coeficientes de la ecuación general $Ax + By + C = 0$ de una recta, de tal manera que pase por los puntos (–1, 4) y (3, –2). En segundo lugar, hallar la ecuación de dicha recta. De acuerdo con lo mencionado, podemos observar que los dos puntos dados están sobre la recta, así que sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de dicha recta. Por lo tanto, para el punto (–1, 4) tenemos:

$$-A + 4B + C = 0$$

Y para el punto restante, (3, –2), tenemos:

$$3A - 2B + C = 0$$

Al resolver las dos ecuaciones anteriores para $A$ y $B$ en términos de $C$, obtenemos lo siguiente:

$$A=-\frac{3}{5}C, \qquad B=-\frac{2}{5}C$$

Al sustituir estos valores en la forma general, resulta:

$$-\frac{3}{5}Cx-\frac{2}{5}Cy+C=0$$

Dividiendo toda la ecuación entre $C$:

$$-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}y+1=0$$

Al multiplicar todo por –5, obtenemos:

$$3x+2y-5=0$$

En consecuencia, los coeficientes de la recta son $A = 3$, $B = 2$ y $C = -5$.

# Problemas de aplicación

La función de la recta no solamente indica una serie de puntos consecutivos en el plano, ya que puede verse también como una función de crecimiento. Por ejemplo, la ecuación $P(n) = 2n + 3P(n) = 2n + 3$ describe una recta que crece en correspondencia con la variable $n$.

Otras aplicaciones sobre la recta se encuentran en las siguientes situaciones:

- Como referencia en la construcción civil, mecánica e industrial.
- Para demarcar espacios físicos.
- Para construir un croquis explicando direcciones o ubicaciones.
- Para calcular la pendiente de un cerro.
- Cuando un automóvil va en una autopista en línea recta.
- Para medir la distancia más corta entre 2 puntos.
- En la caída libre de un objeto.
- Como referencia a una construcción industrial.
- Al calcular el desplazamiento de un avión.

La lista anterior considera sólo algunos ejemplos donde se puede aplicar el concepto de línea recta. Sin embargo, la vida diaria presenta muchos más.

A continuación veremos algunos ejemplos relacionados con la recta.

TIC

Para conocer diversos ejemplos de la recta en la vida cotidiana, consulta el video "Aplicaciones de la recta a situaciones de la vida cotidiana.wmv".

https://www.youtube.com/watch?v=6WC5pL3dYcU

**Ejemplo 1:**

Se requiere calcular la fórmula para transformar grados Fahrenheit (°F) a grados Celsius (°C). Como dato inicial, se sabe que la fórmula de conversión es lineal. Además, se conoce que, a nivel del mar, el agua hierve a 100 °C, lo que equivale a 212 °F, y se congela a 32 °F, lo que equivale a 0 °C. A partir de esta información encuentra la ecuación de transformación.

Para comenzar, podemos representar las variables de este problema con *C* y *F*, por analogía con los nombres Celsius y Fahrenheit. Además, para los cálculos asumiremos que *C* representa los valores en el eje de las ordenadas y *F* los correspondientes al eje de las abscisas.

En este problema se proporcionan dos puntos: $P_1(32, 0)$ y $P_2(212, 100)$. A fin de calcular la ecuación de la recta primero es indispensable descubrir el valor de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{C_2 - C_1}{F_2 - F_1}$$

$$m = \frac{100 - 0}{212 - 32}$$

$$m = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

Ahora, para encontrar la ecuación de la recta utilizaremos la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$C - C_0 = m(F - F_0)$$

Al sustituir los valores encontrados en la ecuación anterior, obtenemos:

$$C - 0 = \frac{5}{9}(F - 32)$$

En la ecuación anterior se utilizó el punto $P_1$ para la sustitución, pero también es posible utilizar el punto $P_2$ para el mismo fin.

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Esta última ecuación representa la solución solicitada.

NO ABANDONO

"Con números se puede demostrar cualquier cosa".
Thomas Carlyle

**Ejemplo 2:**

El gobierno quiere aumentar el precio del litro de gasolina a una razón constante de dos pesos por mes. Si el precio de la gasolina este mes es de 13 pesos el litro, escribe una ecuación que relacione el precio de la gasolina con el tiempo medido en meses transcurridos después de implementar la medida.

Las variables en este problema son:

*P*: precio del litro de gasolina.

*t*: número de meses después de implementada la medida.

**NO ABANDONO**

"Las matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía".
Isócrates

La ecuación que se busca es lineal y, por tanto, se puede representar a través de la ecuación de una recta. Para encontrar dicha ecuación necesitamos definir uno o más puntos que pasen por la misma, así como definir el valor de la pendiente. Según lo establecido, las coordenadas de los puntos para este problema tienen la siguiente forma:

$$(t, P)$$

donde $t$ representa el valor del tiempo representado en el eje de las abscisas y $P$ representa el precio de la gasolina en el tiempo $t$, representado en el eje de las ordenadas.

El primer punto es (0, 13). Este punto corresponde al valor inicial del problema, pues el precio de la gasolina es de 13 pesos en el mes actual. La pendiente es la razón de cambio del precio de la gasolina con respecto al número de meses, entonces:

$$m=\frac{2}{1}=2$$

Con esta información ya es posible encontrar la ecuación de la recta. Se usará la ecuación pendiente-ordenada al origen para encontrarla:

$$y=mx+b$$

$$P=2x+13$$

Esta última expresión corresponde entonces a la ecuación para calcular el incremento al precio de la gasolina con respecto al tiempo medido en meses.

## Actividad de cierre

Reflexión

VALORES

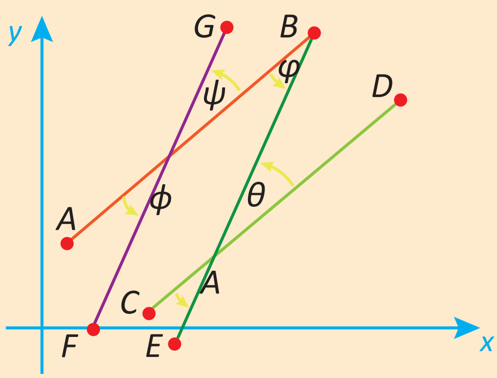
TIC

| COMPETENCIAS | |
|---|---|
| | • **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
| **ATRIBUTO** | • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. |

**1.** En equipo de tres integrantes, pongan en práctica lo aprendido. Para ello, realicen lo siguiente:

- Construyan una lista de definiciones (un diccionario) en su cuaderno. Cada vez que encuentren una nueva definición geométrica, agréguenla a la lista. Ilustren cada definición con un dibujo.
- Investiguen en libros, enciclopedias o internet cómo crear mapas mentales y construyan uno que contenga los conceptos anteriores.
- Observen la figura y copien el cuadro en su cuaderno para completarlo.

| Elemento geométrico | Nombre |
|---|---|
| Puntos | |
| Rectas | |
| Rectas paralelas | |
| Ángulos entre rectas | |




**2.** Entreguen sus resultados a su profesor.

**Recapitula lo que aprendiste en la primera parte del "Resultado de aprendizaje 1.2" y prepárate para realizar la actividad de evaluación 1.2.1.**

1. Completa los mapas conceptuales para integrar los temas vistos hasta el momento.

**Representación gráfica y uso de curvas canónicas**

Análisis de la pendiente de una recta

| Ángulo entre rectas | Paralelismo y perpendicularidad | Familia de rectas |
|---|---|---|

Ecuaciones características:

| | | |
|---|---|---|
| | | |

Representación matemática y graficación de la recta

Ecuación

| Punto-pendiente | Punto-punto | Pendiente-ordenada al origen | Simétrica | General de la recta |
|---|---|---|---|---|

Ecuaciones características:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Realiza tu evaluación parcial.**

1. Escribe en el paréntesis el inciso que corresponda con el procedimiento a seguir para completar cada tarea.

- ( ) Es la representación gráfica de una función de primer grado.
- ( ) Es un elemento que cambia de valor en un determinado momento.
- ( ) Grado de inclinación de una recta.
- ( ) $\forall\, a, b \in A,\ aRb \Leftrightarrow bRa$ es una relación.
- ( ) Es una regla de correspondencia entre los elementos de un conjunto *D* con exactamente un elemento de algún otro conjunto *E*.
- ( ) $y = mx + b$
- ( ) Dos rectas son ____________ cuando sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición distintos.
- ( ) Es el subconjunto de números reales en el que se define la función.
- ( ) Es una figura bidimensional compuesta por una secuencia de líneas consecutivas que forman una región en el plano.
- ( ) Si dos rectas son ____________ es si una de las rectas es paralela al eje *x* y la otra al eje *y*.

1. pendiente
2. función
3. recta
4. paralelas
5. variable
6. dominio
7. polígono
8. ecuación de la recta
9. simétrica
10. perpendiculares

**Valor: 5 puntos**

## Actividad de evaluación 1.2.1

Paciencia

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue
- **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

EVALUACIÓN

ATRIBUTO

- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.

RÚBRICA

1. Representa gráficamente la recta, a partir del análisis de su ecuación en sus diferentes formas y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno, para ello, haz lo siguiente:
2. Calcula las siguientes tres ecuaciones de la recta: en su forma general, pendiente-ordenada al origen y simétrica, de acuerdo con el trazo del plano, diagrama y croquis de alguno de los reactivos del punto 3 de la actividad de evaluación 1.1.1.
3. Resuelve los siguientes problemas de rectas:
    1) Utilizando las pendientes, probar que *AB* y *C* están sobre una recta, dados *A* (3, –5) *B* (0, –2) y *C* (–3,1).
    2) Determinar la ecuación de la recta en su forma: General, pendiente-ordenada al origen y simétrica, si la pendiente $m = 1$ ordenada al origen $b = 2$ determinar la ecuación de otra recta que tiene por coordenadas al origen $b = 6$ y $a = -2$ trazar otras dos rectas y determinar el punto donde se cortan.
    3) Una recta pasa por el punto (3, –6) y es perpendicular a la recta definida por los puntos (4,1) y (2,5) encontrar las ecuaciones de estas dos rectas el punto donde se cortan y sus intersecciones con los ejes de coordenadas.
    4) Obtener los valores de la abscisa y ordenada al origen, trazar la recta correspondiente y expresar la ecuación en la forma general, simplificada y simétrica de la ecuación $2x - 5y + 20 = 0$
    5) Escribir en la forma simétrica la ecuación de la recta $4x + 3y + 18 = 0$.
    6) Dada la ecuación $6x + 12y + 24 = 0$ encontrar la recta paralela que pasa por el punto (0, 6).
    7) La pendiente de una recta que pasa por el punto *P* (3, 2) es igual a ¾. Sitúa dos puntos sobre esta recta que disten 5 unidades de *P*. Compruébalo con la gráfica.
    8) Encontrar la forma simétrica la ecuación de la recta $5x + 2y - 3 = 0$.
    9) Dados tres puntos en el plano cartesiano, uno en el primer cuadrante, otro en el segundo cuadrante y el tercero el punto $P3 = (0\ -5)$, calcula lo siguiente:
        - Une los tres pares ordenados.
        - Perímetro.
        - Área.
        - La ecuación de sus lados.
        - Las ecuaciones de las tres alturas.
    10) Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* (1,2) y *B*(–2,5), en sus distintas formas (general, simétrica, etc.).
4. Realiza la gráfica de los ejercicios anteriores en un plano cartesiano.
5. Dibuja las coordenadas en el primer cuadrante, segundo cuadrante e intersección con el eje *y* negativo propuestos por tu profesor.
6. Soluciona problemas representando gráficamente ecuaciones de las rectas ya sea en su forma general, pendiente-ordenada al origen o simétrica y determina la intersección con los ejes coordenados, la pendiente y el ángulo de inclinación.

1) La distancia del baricentro a uno de los vértices de un triángulo es de 6 cm. Calcula la longitud de la mediana correspondiente al lado opuesto a ese vértice.

2) En una habitación entra un haz de luz por una ventana que forma con el suelo un ángulo de 43°. ¿Cuál es el ángulo que forma el rayo de luz con la pared de la ventana por la que entra?

7. Resuelve los siguientes ejercicios de triángulos:

1) Dado un triángulo formado por las coordenadas $A(2, -1)$, $B(-5, 1)$ y $C(0, 3)$ calcula las ecuaciones de dos mediatrices.

- Grafica en hoja milimétrica las rectas correctamente.
- Une los puntos y del triángulo resultante, calcula la ecuación de las rectas notables en el triángulo: 3 mediatrices, 3 medianas y 3 altura.
- Calcula y traza en la gráfica las coordenadas de los puntos notables en dicho triángulo: circuncentro, baricentro y ortocentro.

2) En una hoja milimétrica y con ayuda de una regla y compás, dibuja un triángulo cuyos ángulos midan $A = 45°$, $B = 100°$ y $C = 35°$ y encuentra el incentro de dicho triángulo. Construye la circunferencia inscripta en el triángulo.

3) En una hoja milimétrica y con ayuda de una regla y compás, dibuja un triángulo cuyos dos de sus lados miden 4cm y 6.5cm, respectivamente, con un ángulo de 70°. Trazar las tres alturas del triángulo.

4) En una hoja milimétrica y con ayuda de una regla y compás:

- Dibuja un triángulo rectángulo.
- Dibuja dos de sus bisectrices (las que tú quieras).
- Señala el punto de intersección de ambas.

8. Interpreta los resultados obtenidos en las gráficas del punto 7 de esta actividad y escribe tus conclusiones.

9. Pasa en limpio el trabajo realizado de los puntos 2 al 8 de esta actividad, no olvides incluir su respectivo título. incluye también los procedimientos y métodos aplicados, junto con los resultados que obtuviste paso por paso. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha, número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.

10. Antes de entregar tus resultados a tu profesor, realiza la Rúbrica 1.2.1, de tu "Autoevaluación" que se encuentra al final de esta unidad en la sección "Instrumentos de evaluación". Revisa si cumples con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejoren tu trabajo antes de presentarlo.

11. Entrega tu trabajo al profesor.

NO ABANDONO

"Las personas que trabajan en conjunto ganarán, ya sea que estén en contra de una defensiva complicada del futbol americano, o los problemas que enfrenta la sociedad moderna".
Vince Lombardi

**Contesta los reactivos que se presentan a continuación, rellenado completamente el óvalo de la respuesta correcta.**

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 4) y tiene una pendiente $m = -5$.

   ⓐ $y = -5x - 19$

   ⓑ $y = 5x - 19$

   ⓒ $y = -5x + 19$

   ⓓ $y = -5x - 11$

2. Encontrar la pendiente de una recta que es paralela a la recta $y = -4x + 5$.

   ⓐ pendiente = – 5

   ⓑ pendiente = 5

   ⓒ pendiente = 4

   ⓓ pendiente = – 4

3. Hallar la ecuación de la recta que contiene el punto (1, 2) y que sea perpendicular a la recta $y = 2x - 6$.

   ⓐ $y = -2x + \frac{5}{2}$

   ⓑ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

   ⓒ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

   ⓓ $y = x + 1$

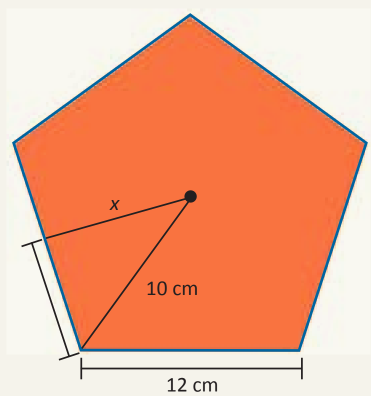
4. Hallar el área del siguiente polígono.

   ⓐ 60

   ⓑ 240

   ⓒ 480

   ⓓ 600



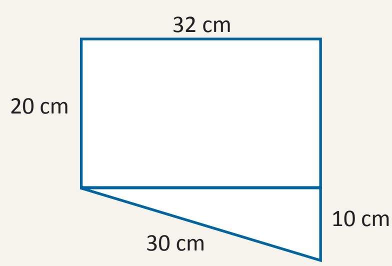

5. Encontrar el área del siguiente polígono.

   ⓐ 160

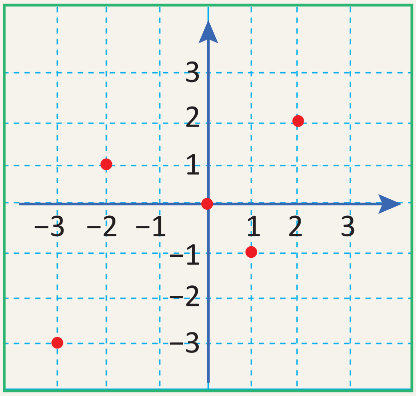
   ⓑ 640

   ⓒ 800

   ⓓ 850



6. De la siguiente gráfica, indica cuáles son los puntos marcados.




ⓐ (0,0), (1, −2), (2, 2), (−1, 1), (−3, 3)

ⓑ (0,0), (−2, 1), (2, 2), (1, −1), (−3, −3)

ⓒ (0,0), (1, −2), (2, 2), (−1, 1), (3, 3)

ⓓ (0,0), (1, −2), (2, 2), (−1, −1), (−3, −3)

7. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos *A*(2, −1) y *B*(5, 3).

ⓐ $\frac{4}{3}$

ⓑ $\frac{3}{4}$

ⓒ $\frac{2}{4}$

ⓓ $\frac{1}{3}$

8. Hallar el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos *A*(−4, −2) y *B*(1, 5).

ⓐ $\theta = 50^{o}$

ⓑ $\theta = 64^{o}$

ⓒ $\theta = 54.4^{o}$

ⓓ $\theta = 64.4^{o}$

9. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos *A*(0, 1) y *B*(3, 0).

ⓐ $\frac{1}{3}$

ⓑ 2

ⓒ $-\frac{1}{3}$

ⓓ $\frac{2}{3}$

10. Hallar el área del siguiente polígono regular

ⓐ 250 $cm^2$

ⓑ 86.6 $cm^2$

ⓒ 43.3 $cm^2$

ⓓ 259 $cm^2$

# Autoevaluación

Evalúa los indicadores de aprendizaje de cada actividad de evaluación parcial para conocer la calificación que estás en posibilidad de obtener en la rúbrica según tu desempeño. Marca una √ en cada indicador logrado.

Para obtener Suficiente, deberás cubrir todos los indicadores del tono más claro, y para lograr Excelente, todos los indicadores de ambos tonos.

Suficiente    Excelente

| Rúbrica 1.1.1 | | |
|---|---|---|
| **Módulo:** Representación gráfica de funciones. | **Grupo:** | |
| **Nombre del alumno:** | **Fecha:** | |
| **Resultado de aprendizaje (R.A.):** 1.1. Representa gráficamente espacios geométricos poligonales, considera los principios, leyes y procedimientos gráficos, aplicables a la solución de situaciones de la vida cotidiana. | **Actividad de evaluación:** 1.1.1 Construye lugares geométricos poligonales en un sistema cartesiano, obteniendo la longitud de sus lados, medición de sus ángulos y la superficie delimitada | |
| **Porcentaje** | ✓ | **Indicador logrado** |
| **Trazo del mapa, plano o croquis** **20%** | | Localicé puntos y realicé uniones para demostrar que formaban un espacio geométrico empleando los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. |
| | | Describí por escrito el proceso de localizar y unir puntos en el plano. |
| **Cálculo de longitudes, superficies del mapa, plano o croquis** **40%** | | Calculé la distancia entre dos puntos localizados dentro del plano cartesiano determinando perímetros y tipos de polígonos formados por varios pares coordenados. |
| | | Proporcioné por escrito un ejemplo en los que se aplica este proceso en la vida real. |
| **Cálculo de ángulos interiores del mapa, plano o croquis** **40%** | | Calculé ángulos interiores considerando el mapa, plano o croquis, aplicando la fórmula de pendientes. |
| | | Comprobé el cálculo obtenido realizando la medición correspondiente con transportador en el mapa, plano o croquis elaborado. |
| | **100** | |

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el RA 1.1 y platica con tu profesor para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Marca una √ en cada indicador logrado.

<table>
<tr><th colspan="3">Rúbrica 1.2.1</th></tr>
<tr><td>Módulo:<br>Representación gráfica de funciones</td><td colspan="2">Grupo:</td></tr>
<tr><td>Nombre del alumno:</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td>Resultado de aprendizaje:<br>1.2. Construye la ecuación de la recta y su representación gráfica a partir de los elementos que la integran.</td><td colspan="2">Actividad de evaluación:<br>1.2.1 Representa gráficamente la recta, a partir del análisis de su ecuación en sus diferentes formas y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno.</td></tr>
<tr><th>Porcentaje</th><th>✓</th><th>Indicador logrado</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ecuación de la recta<br><br>30%</td><td></td><td>Calculé las tres ecuaciones de la recta: en su forma general, pendiente ordenada al origen y simétrica, de acuerdo con el trazo del plano, diagrama y croquis de la actividad 1.1.1.</td></tr>
<tr><td></td><td>Determiné el valor de la pendiente ordenada y abscisa al origen.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Gráfica de la recta<br><br>30%</td><td></td><td>Solucioné problemas representando gráficamente las ecuaciones de la recta en su forma general, pendiente-ordenada al origen o simétrica.</td></tr>
<tr><td></td><td>Determiné la intersección con los ejes ordenados, la pendiente y el ángulo de inclinación.</td></tr>
<tr><td></td><td>Interpreté y expliqué los resultados obtenidos en la gráfica.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Gráfica y ecuaciones<br><br>40%</td><td></td><td>Calculé la ecuación de las rectas notables en el triángulo: mediatrices, medianas y alturas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Dibujé coordenadas en el primer y segundo cuadrantes, así como intersecciones con el eje y negativo propuestos por el docente.</td></tr>
<tr><td></td><td>Grafiqué en hojas milimétricas las rectas correctamente.</td></tr>
<tr><td></td><td>Calculé y tracé en la gráfica las coordenadas de los puntos notables del triángulo: circuncentro, baricentro y ortocentro.</td></tr>
<tr><td></td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de "Suficiente", o si deseas mejorar para lograr el "Excelente", repasa los conceptos vistos en el RA 1.2 y platica con tu profesor para obtener una segunda oportunidad de valoración.

## Heteroevaluación

De acuerdo con el desempeño de sus alumnos, anote el peso logrado en cada actividad realizada. Sume los porcentajes para obtener el peso para la unidad.

<table>
<tr><th colspan="9">Tabla de ponderación</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Unidad</th><th rowspan="2">RA</th><th rowspan="2">Actividad de evaluación</th><th colspan="3">Aspectos a evaluar</th><th rowspan="2">% Peso específico</th><th rowspan="2">% Peso logrado</th><th rowspan="2">% Peso acumulado</th></tr>
<tr><th>C</th><th>P</th><th>A</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Representación gráfica de lugares geométricos.</td><td>1.1. Representa gráficamente espacios geométricos poligonales, considera los principios, leyes y procedimientos gráficos, aplicables a la solución de situaciones de la vida cotidiana.</td><td>1.1.1</td><td>▲</td><td>▲</td><td>▲</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2 Construye la ecuación de la recta y su representación gráfica a partir de los elementos que la integran.</td><td>1.2.1</td><td>▲</td><td>▲</td><td>▲</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">% peso para la unidad 1</td><td>40</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Peso total del módulo</td><td>100</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Al término de la última unidad, sume el peso logrado en todas las unidades y obtenga el total del módulo.

## Coevaluación

Trabaja con un compañero para que se evalúen mutuamente. Escribe los datos de tu compañero en la tabla siguiente. Evalúa los atributos de las competencias genéricas que tu compañero puso en práctica durante esta unidad; para ello, en la tabla indica con una "X" la casilla que corresponda.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Nombre de mi compañero:** | | | | |
| **Carrera:** | | **Nombre del módulo:** | | |
| **Semestre:** | | **Grupo:** | | |
| **Competencias genéricas** | **Atributos** | **Con frecuencia** | **Algunas ocasiones** | **Nunca** |
| **Se autodermina y cuida de sí** | | | | |
| 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. | Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida. | | | |
| | Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. | | | |
| **Piensa crítica y reflexivamente** | | | | |
| 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. | Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. | | | |
| **Aprende de forma autónoma** | | | | |
| 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. | Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento. | | | |
| | Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos. | | | |
| **Trabaja en forma colaborativa** | | | | |
| 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. | Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. | | | |

# Cultura financiera y para el consumo

En esta sección, pondrás en práctica estrategias para que administres y planifiques tu dinero; desarrolles una actitud crítica hacia el consumo, y conozcas tus derechos y deberes como consumidor. Esto con el fin de que seas capaz de decidir qué consumir, cómo hacerlo y por qué, y bases tus decisiones en el valor real que para ti tienen los productos, según tus necesidades y deseos.

## Alimentación eficiente y bolsillo saludable

"Un estómago vacío es un mal consejero".
Albert Einstein, físico alemán de principios del siglo XX

**Glosario**

**Pico de crecimiento:** periodo del desarrollo en el que el aumento de talla y estatura es más acelerado.

En nuestro país destinamos en promedio más de la tercera parte del ingreso familiar a la adquisición de alimentos y bebidas ("La alimentación de los mexicanos", Cámara Nacional para Industria y la Transformación, 2012). Por otro lado, según los datos de la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición de 2012, el promedio nacional de población infantil con problemas de alimentación es del 23% considerando como infancia desde los 0 hasta los 18 años. Estos datos nos indican que gastamos en alimentos pero no nos nutrimos correctamente.

Las mujeres entre los 11 y los 15 años y los hombres entre los 13 y los 16 se encuentran en un **pico de crecimiento**. En estos periodos en indispensable que tu alimentación sea balanceada y suficiente para cubrir los requerimientos que tu cuerpo demanda.

La falta de alimento nutritivo provoca una serie de reacciones químicas que afectan tu estado de ánimo, así como tu desempeño físico y mental. Diversos estudios han comprobado que los alumnos con una alimentación deficiente presentan fatiga, apatía, falta de concentración y atención, y poca creatividad, lo que deriva en el bajo rendimiento escolar. Para aprovechar mejor tu capacidad intelectual y sentirte bien, es indispensable que consumas alimentos que te proporcionen los nutrimentos que necesita tu cuerpo. Por ejemplo, las funciones cerebrales requieren sodio y potasio principalmente; tus músculos necesitan proteínas para fortalecerse, y tus huesos, calcio; las vitaminas ayudan a que los procesos químicos de tu organismo se realicen adecuadamente y los nutrientes lleguen a las células.

Comer bien no significa gastar mucho en comida, lo importante es que consumas los alimentos que te aportan lo necesario: calcio, zinc, hierro, vitaminas, proteínas y agua suficiente. Los siguientes tips para escoger tus alimentos te serán de utilidad.

### Tips para comer nutritivo con poco dinero

- Nunca vayas a clases sin desayunar. Si es posible, prepara un sándwich o una chapata con verduras y pollo o atún. Si no te da tiempo de hacerlo o sales muy temprano y aún no tienes hambre, lleva a la escuela algo que puedas almorzar o tomar como refrigerio: elige como primera opción las frutas. Los plátanos, las manzanas y las naranjas son frutas que se consiguen todo el año a precios accesibles.
- No compres refrescos. Usa una cantimplora para llevar el agua, el jugo o agua de avena con canela desde casa para evitar el gasto del agua embotellada.

- Si tienes hambre en la escuela, en vez de comprar galletas o frituras, escoge semillas o frutas deshidratadas: pepitas, cacahuates, pistaches, o pasitas o rodajas de manzanas.
- Para consumir cereales, las barras de amaranto (las alegrías) son una opción muy nutritiva y económica, que te aportan buena cantidad de energía; también son buenas las palanquetas, con moderación.
- En casa, la combinación de arroz con frijoles es una fuente de proteínas de buena calidad y de muy bajo costo. El atún enlatado sin aceite también es una buena fuente de proteínas.
- Dedica un tiempo a la semana para hacer compras inteligentes y ahorrar en lo que sea posible; compra la fruta de la semana una sola vez en el mercado, donde generalmente los precios y la calidad son mejores que en los grandes almacenes.


**Glosario**

**Palanqueta:** dulce seco en forma de barra o disco, que se hace con cacahuate o semillas de calabaza y miel.

## Buenas compras

1. En pareja, organicen una visita preferentemente a un mercado; si no cuentan con uno cerca, a una tienda de abarrotes o a un supermercado.
2. Investiguen el precio unitario de los alimentos de la siguiente tabla y regístrenlo.

| Alimento | Precio unitario | Lugar de consulta | Alimento | Precio unitario | Lugar de consulta |
|---|---|---|---|---|---|
| Lata de atún | | | Galletas saladas integrales (chicas) | | |
| Naranja | | | 100 gramos de queso fresco | | |
| Pera | | | Porción de yogurt natural | | |
| Manzana | | | Porción individual de leche | | |
| Plátano | | | Vaso de jugo de zanahoria natural | | |
| Guayaba | | | Vaso de jugo de naranja natural | | |
| Zanahoria | | | Vaso de jugo verde | | |
| Pepino | | | Bolsita de cacahuates | | |
| Jitomate | | | Bolsita de semillas de girasol | | |
| Barra de amaranto | | | Bolsita de almendras o nueces | | |
| Palanqueta chica | | | Pan integral (chapata, bolillo) | | |
| Botella de agua | | | Porción de fruta picada (300 gramos) | | |
| Bolsa de granola (chica) | | | Manojo de espinacas | | |

3. Con los alimentos de la tabla anterior, elaboren una combinación que contenga alimentos de los cuatro grupos (frutas y verduras, lácteos o sustitutos, proteínas, cereales) y calculen el costo de la misma.

| | Frutas y verduras | Derivados lácteos | Proteínas | Cereales |
|---|---|---|---|---|
| Alimento | | | | |
| Costo | | | | |
| Total | $ | | | |

4. Compartan su combinación con el resto del grupo y comenten las razones de su selección.
5. Intercambien información e identifiquen los lugares en los que encontraron mejores precios de esos productos.
6. Discutan cuáles son las mejores opciones para adquirir alimentos para su almuerzo o refrigerio; consideren precio, punto de venta y valor nutricional.
7. Utiliza esta información para tu próxima elección a la hora de elegir tus alimentos fuera de casa. Recuerda que alimentarte bien es una muy buena inversión.

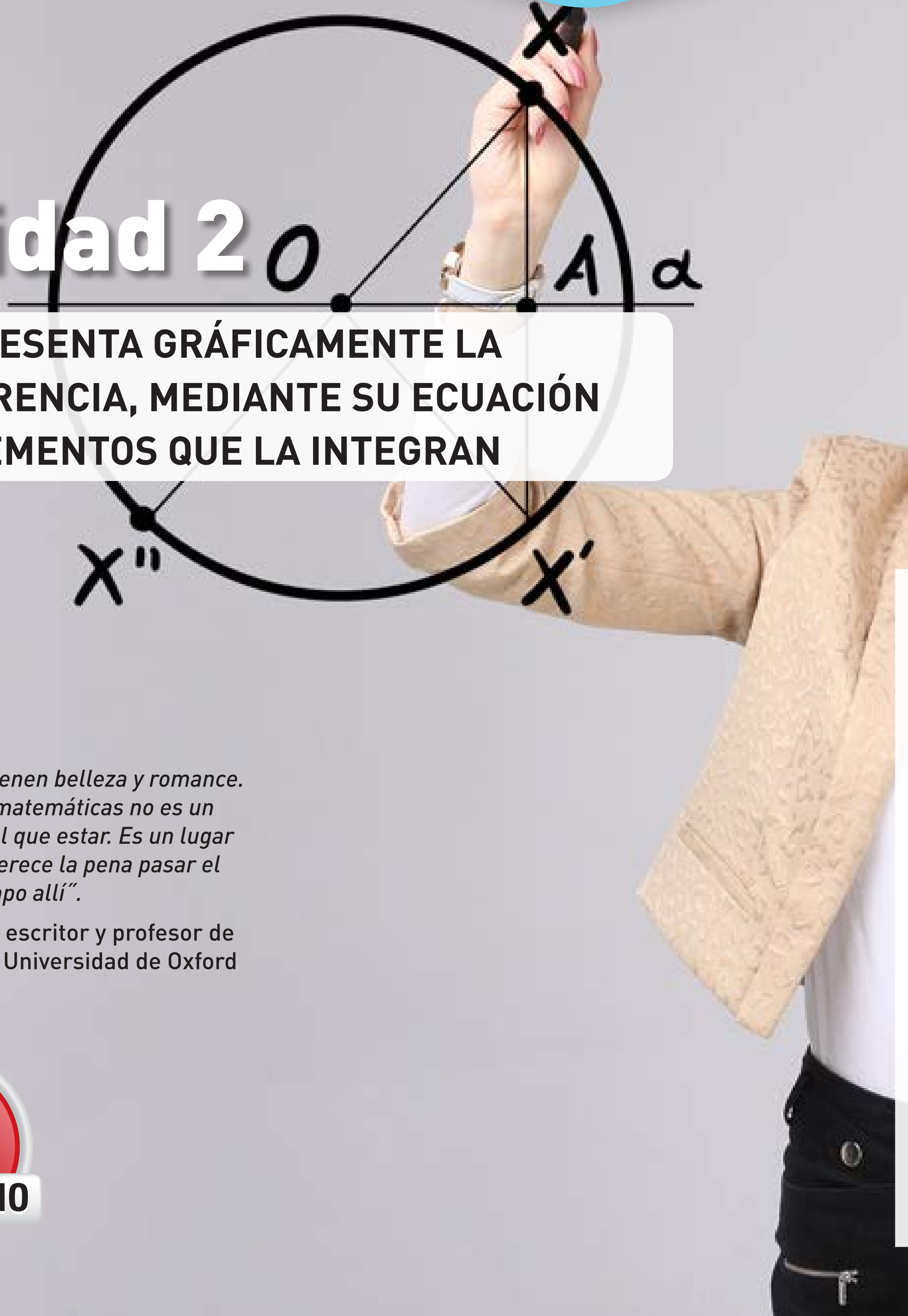
¿Cuáles son los elementos de una circunferencia?

¿Qué son la elipse y la parábola?

# Unidad 2

## REPRESENTA GRÁFICAMENTE LA CIRCUNFERENCIA, MEDIANTE SU ECUACIÓN O ELEMENTOS QUE LA INTEGRAN

**30 horas**




*"Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí".*

Marcus du Sautoy, escritor y profesor de matemáticas de la Universidad de Oxford

NO ABANDONO

## Competencias genéricas

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
3. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
4. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
5. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

## Competencias disciplinares básicas de matemáticas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
6. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

# Secciones cónicas

Para entender completamente un concepto hay que conocer sus orígenes: cómo, cuándo, y por qué surge, entre otros factores. En primer lugar, podemos pensar que las formas del Sol y de la Luna debieron influir decisivamente en el temprano descubrimiento y consagración de la circunferencia como la forma geométrica plana más regular. Podemos encontrar construcciones arquitectónicas con esta forma a partir del siglo XIX a.C., lo que configura a la circunferencia, después de la recta, como el primer lugar geométrico conocido y utilizado por la humanidad.

Para encontrar formas nuevas hay que esperar hasta la cultura griega de los siglos V y IV a.C. Por entonces, empiezan a circular tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. El problema de la duplicación del cubo fue el más famoso en los tiempos de los antiguos griegos. Hay dos narraciones diferentes dadas por comentadores posteriores sobre los orígenes del problema.

La primera fue transmitida por Eratóstenes. Éste, en su obra titulada “Platonicus”, relata que cuando el dios anunció a los delianos (este problema también se llama “problema de Delos”) a través del oráculo que para deshacerse de la plaga debían construir un altar del doble del que había, sus artesanos quedaron desconcertados en sus esfuerzos por descubrir cómo podían hacer un sólido que fuera el doble de otro sólido similar; por ello fueron a preguntarle a Platón al respecto, quien respondió que el oráculo quería decir no que el dios quisiera un altar del doble del tamaño sino que deseaba, al imponerles la tarea, avergonzar a los griegos por su descuido de las matemáticas y su desprecio por la geometría.

La plaga sin duda fue un evento importante en la historia de Atenas, y aproximadamente un cuarto de la población murió por esta causa. Esto sucedió alrededor del 420 a.C. De haber algo de verdad en esta leyenda, al menos podemos dar una fecha razonablemente exacta para la aparición del problema. Esto también es consistente con una contribución anterior de Hipócrates al problema.

Eutocio, en su comentario a *Sobre la esfera y el cilindro* de Arquímedes, dio una versión un tanto distinta. Todo comienza con una carta escrita por Eratóstenes al rey Tolomeo y, aunque la carta es una falsificación, el escritor sí cita algunos escritos genuinos de Eratóstenes. El texto de la carta dice: “Eratóstenes al rey Tolomeo, saludos. La anécdota dice que uno de los poetas trágicos antiguos representaba a Minos haciendo construir una tumba para Glauco y que, cuando Minos descubrió que la tumba medía cien pies de cada lado, dijo: ‘Demasiado pequeña es la tumba que habéis señalado como el sitio real de descanso. Hacedla el doble de grande, sin arruinar la forma: rápidamente duplicad cada lado de la tumba.’”

Esto era claramente un error ya que, si los lados se duplican, la superficie se multiplica por cuatro y el volumen por ocho. Muchos sabios y filósofos se ocuparon de la resolución de estos problemas y, aunque sin demostrarlo rigurosamente, pronto se dieron cuenta que la solución era imposible utilizando sólo la regla y el compás por un número finito de veces. En aquella época sólo se admitían dos maneras de definir curvas: con composiciones de movimiento uniformes y como intersección de superficies geométricas conocidas.

El siguiente diagrama muestra la evolución en el estudio de las curvas cónicas, desde su descubrimiento en el siglo IV a.C. hasta la actualidad (siglo XXI).

| | |
|---|---|
| **Siglo IV-II a.C.** | **Menecmo (380 a.C.-320 a.C.).** Matemático y geómetra griego. Descubridor de las curvas cónicas. Las obtuvo por corte de un cono circular con un plano perpendicular a la generatriz del mismo. |
| | **Euclides (325 a.C.-265 a.C.).** Además de su famoso libro de *Los elementos* escribió uno sobre las cónicas (que no se conserva). |
| | **Arquímides (287 a.C.-212 a.C.).** Logra cuadrar un segmento de parábola (*La cuadratura de la parábola*) y calcula el área de una elipse (*Sobre conoides y esferoides*). |
| | **Apolonio de Pérgamo (262 a.C.-180 a.C.).** Resume, amplía y sistematiza el conocimiento sobre las cónicas en su obra *Cónicas*, que consta de ocho volúmenes. |
| **Siglo III-IV** | **Papo de Alejandría (290 d.C.-350 d.C.).** Introdujo la noción de foco a una parábola y directriz de una sección cónica. |
| **Siglo XI-XII** | **Omar Jayam (1048-1131).** Utilizó las secciones cónicas para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Se basó en los libros de *Cónicas,* de Apolonio. |

*Las cónicas de Apolonio* Colección vaticana (1536).

*Secciones cónicas*, en <http://envigadodspace.colombiaaprende.edu.co/bitstream/4/152/1/SM_M_G09_U02_L05_M,S,A.pdf>, consulta: mayo de 2016.

NO ABANDONO

"Denme un punto de apoyo
y moveré el mundo".
Arquímedes

## Evaluación de comprensión lectora

**Con base en el texto anterior, lee las siguientes preguntas y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.**

1. ¿Qué factores pudieron haber influido en el descubrimiento de la circunferencia?

   (a) La Luna y el Sol.

   (b) El horizonte y las estrellas.

   (c) Las construcciones y la naturaleza.

   (d) Las montañas y los mares.

2. ¿A partir de que época se pueden encontrar edificaciones inspiradas en la circunferencia?

   (a) Siglo XIX d.C.

   (b) Siglo IV a.C.

   (c) Siglo XIX a.C.

   (d) Siglo V a.C.

3. De los problemas clásicos que surgieron en los siglos V y IV a.C., ¿cuál fue el más famoso?

   (a) La cuadratura del círculo.

   (b) La duplicación del cubo.

   (c) La trisección del ángulo.

   (d) Ninguno de los anteriores.

4. En la obra de Eratóstenes titulada *Platonicus*, ¿qué les pide el dios a los griegos para deshacerse de la plaga?

   (a) Construir un altar del doble de tamaño del que había.

   (b) Construir un altar de la mitad del tamaño del que había.

   (c) Construir un altar del triple de tamaño del que había.

   (d) Construir un altar del mismo tamaño del que había.

5. ¿Después de qué otro elemento geométrico se posiciona la circunferencia como uno de los más importantes?

   (a) La elipse.

   (b) La hipérbola.

   (c) La recta.

   (d) El plano.

## Evaluación diagnóstica

**Lee con atención cada pregunta y responde según tus conocimientos.**

1. Cita la fórmula general de la pendiente.

_______________________________________________

2. Define, con tus propias palabras, qué es dominio y qué es rango.

_______________________________________________

3. Menciona la diferencia entre paralelismo y perpendicularidad.

_______________________________________________

4. ¿Cuál es la ecuación general de la recta?

_______________________________________________

5. ¿Cuál es la fórmula general de la distancia entre dos puntos?

_______________________________________________

6. Menciona qué define el grado de una ecuación.

_______________________________________________

7. En tus propias palabras, ¿qué es un algoritmo?

_______________________________________________

8. ¿Cuál es el valor de la constante $\pi$?

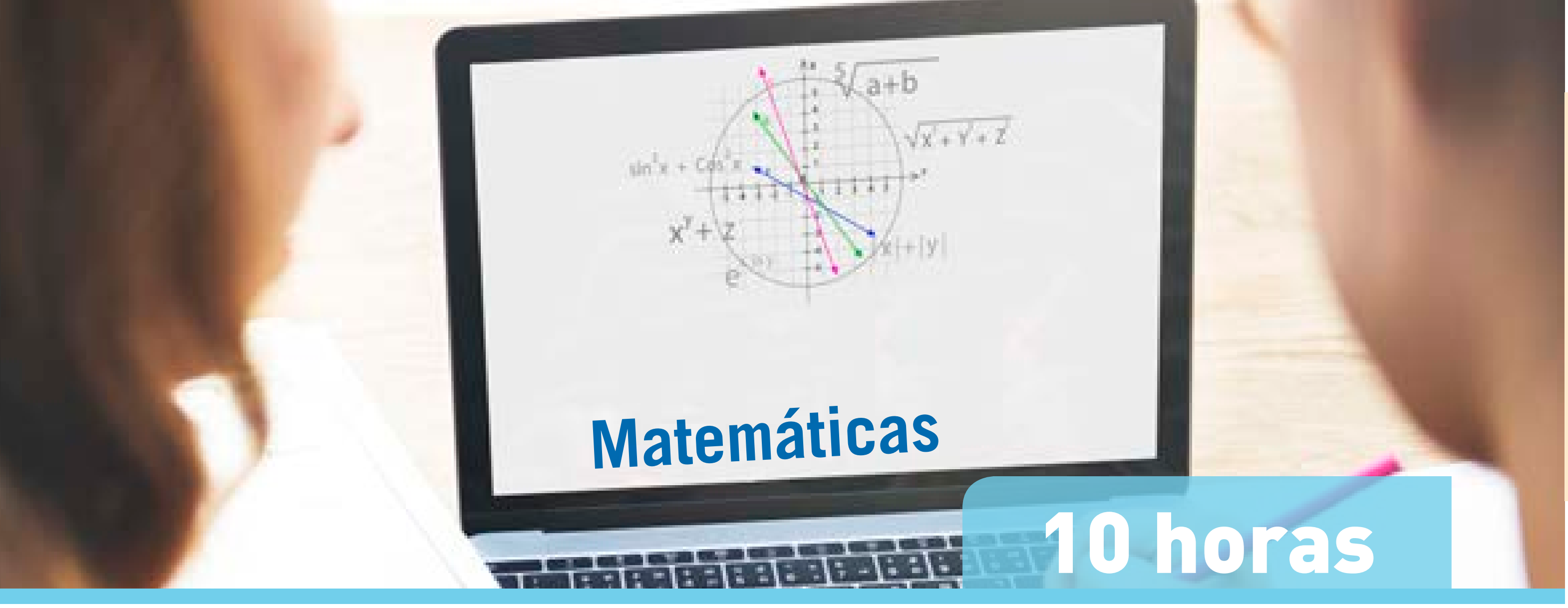
_______________________________________________

9. ¿Cuáles son las familias de rectas?

_______________________________________________

10. Cita la expresión de la forma punto-pendiente para la ecuación de la recta.

_______________________________________________




10 horas

# 2.1 Representa gráficamente la circunferencia, mediante su ecuación o elementos que la integran

En la unidad anterior, se estudió la recta junto con sus propiedades. Uno de los problemas fundamentales que se abordaron fue la identificación de la fórmula de la recta. En esta sección, se tratará un elemento geométrico diferente pero que guarda cierta relación con la recta: la circunferencia.

## Representación gráfica y elementos de la circunferencia

La palabra circunferencia proviene del latín *circumferentia*, que significa periferia o contorno, por lo que, en principio, puede aplicarse a cualquier figura, no necesariamente una circular. Además, la costumbre ha hecho que se designe con la palabra círculo tanto la superficie como la curva que la delimita. Sin embargo, en la actualidad, se ha convenido que circunferencia se refiere a la curva que delimita la superficie llamada círculo.

En este apartado nos ocuparemos de describir las propiedades de la circunferencia.

### Actividad de inicio

Cooperación

VALORES

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.<br>• **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. |
| ATRIBUTO | • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. |

1. En pareja, reflexionen acerca de la circunferencia en la vida cotidiana. Para ello, hagan lo siguiente:

2. Dibujen todos aquellos objetos de la vida diaria que tengan forma circular.
3. Según el conjunto de objetos que dibujaron respondan lo siguiente:
   - ¿Los objetos necesariamente deben tener una forma circular?
   - ¿Qué otra forma geométrica podrían tener?
   - Si el círculo fuera irregular, esto es, que la distancia de los puntos de la circunferencia no necesariamente estuvieran a una misma distancia, ¿seguiría siendo útil?
   - Si suprimiéramos las formas circulares, ¿nuestra vida experimentaría algún cambio?
4. Anoten sus respuestas en el cuaderno y discútanlas de manera grupal.

## La circunferencia como lugar geométrico

Es importante comenzar por definir que la **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que **equidistan** de otro punto llamado centro. La **figura 2.1** representa una circunferencia de centro $O$.

Los puntos $A$, $B$ y $C$ son puntos de la circunferencia y los segmentos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$ se llaman radios.

El círculo, por otro lado, es la región del plano delimitada por una circunferencia y que posee un área definida, lo que significa que la circunferencia es el perímetro del círculo. Como todas las medidas de longitud, el radio de una circunferencia siempre será positivo, por ejemplo, 5 o 7 y nunca –5 o –7.

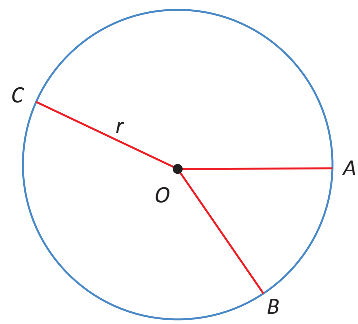


Figura 2.1. Circunferencia de centro $O$.

Un **lugar geométrico** se define como la figura formada por los puntos del plano que cumplen con una condición. Dicha condición se expresa a través de una ecuación que debe satisfacer todos los puntos del plano que pertenecen al lugar geométrico.

Para definir una circunferencia, los puntos deben cumplir con la condición de equidistancia con respecto a un punto fijo, el centro. De esta forma, todo punto que pertenezca a la circunferencia tiene igual distancia entre él y el punto fijo, y tal distancia se conoce como radio. La ecuación de la circunferencia se obtiene al calcular la distancia entre estos puntos.

**Glosario**

**Equidistante:** que está a la misma distancia.

## Actividad de desarrollo

Dedicación

VALORES

TIC

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.<br>• **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. |
| ATRIBUTO | • Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas. |

1. En equipo de cuatro integrantes, realicen la siguiente práctica:
   - Material: 3 conos de papel y tijeras.
2. Discutan las siguientes preguntas:
   - ¿Cuál es la forma que tiene la órbita de los planetas al rededor del Sol?
   - ¿Qué forma tienen los discos compactos?
   - ¿Qué forma tiene la trayectoria que sigue un proyectil?
3. Numeren los conos del 1 al 3.

- Para cada uno de los conos:
  - Tracen un eje coordenado de tal manera que el eje *x* quede a la mitad del cono y el eje *y* quede en la parte más larga del mismo. Lo anterior se ilustra en la figura 2.2.
- Para el cono 1:
  - Recorten el cono siguiendo la línea del eje *x.*
- Para el cono 2:
  - Tracen una recta que pase por el origen y tenga un ángulo de 35 grados que corte el primer y tercer cuadrante. Como se muestra en la figura 2.2.
  - Recorten el cono siguiendo la línea trazada.
- Para el cono 3:
  - Tracen una línea que vaya del límite superior del eje *y* al límite izquierdo del eje *x*. Consideren el límite superior del cono como la parte más amplia del mismo. Lo anterior se ilustra en la figura 2.2.
- Etiqueten el cono 1 como circunferencia.
- Etiqueten el cono 2 como elipse.
- Etiqueten el cono 3 como parábola.

**4.** Las preguntas iniciales y la actividad que realizaron forman parte de lo que se conoce como secciones cónicas. Investiguen en internet la definición de secciones cónicas y busquen ejemplos relacionados con la vida cotidiana donde se aplique tal definición.

**5.** Para finalizar, hagan una breve presentación sobre las actividades realizadas y preséntenlas ante el grupo.

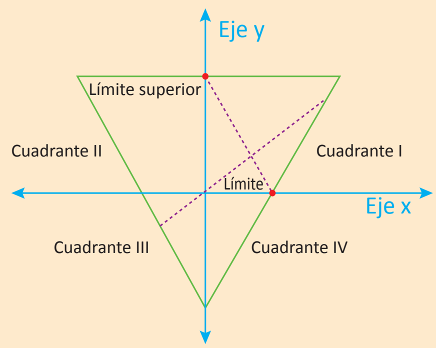


Figura 2.2. Ejemplo de cono.

# Elementos de la circunferencia

La circunferencia está compuesta de diferentes elementos, a saber, centro, radio, diámetro, cuerda, secante, tangente y arco. Hablaremos de ellos a continuación.

## Centro

El **centro** es el punto fijo del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia, y aparece representado como *O* en la **figura 2.3**.

## Radio

El **radio** es el segmento de recta que une el centro con cualquier otro punto de la circunferencia. En la **figura 2.3** aparece dibujado un radio, el segmento $\overline{OH}$.

## Diámetro

El **diámetro** es toda cuerda que pasa por el centro. En la **figura 2.3** se aprecia el diámetro formado por los puntos *A* y *B*. Visto de otra forma:

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = r + r = 2 \bullet r$$

El diámetro es un elemento importante para la circunferencia y cuenta con una serie de propiedades importantes, que son:

- Un diámetro divide a la circunferencia (y al círculo) en dos partes iguales.
- El diámetro es la mayor cuerda de la circunferencia.
- Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos subtendidos en partes iguales.

Como dato adicional, el radio mide la mitad que el diámetro.

TIC

En el video “Como Calcular el Área de un Circulo.mp4” se describen, con mayor detalle, los pasos para calcular el área de un círculo.

https://www.youtube.com/watch?v=8aGg8v3xcBk

## Cuerda

La **cuerda** es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia; por ejemplo, el segmento $\overline{CD}$ en la **figura 2.3**.

## Secante

La **secante** es una recta que tiene dos puntos comunes con la circunferencia. En la **figura 2.3**, la secante está representada por la recta que pasa por los puntos *E* y *F*. Como se puede observar, existen dos puntos de la recta que tocan a la circunferencia.

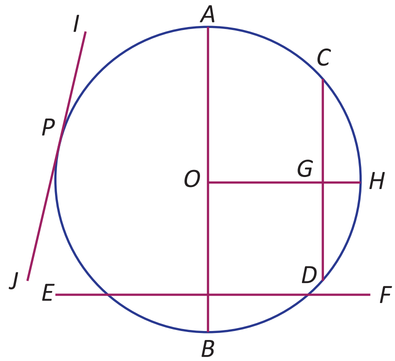



Figura 2.3. Elementos de la circunferencia: radio $\overline{OH}$, cuerda $\overline{CD}$, secante $\overline{EF}$, tangente $\overline{JI}$, diámetro $\overline{AB}$.

## Tangente

La **tangente**, a diferencia de la secante, sólo comparte un punto en común con la circunferencia. Este punto se denomina como *punto de tangencia* o *punto de contacto*. En la **figura 2.3** la tangente está representada por el segmento de recta definido por los puntos *J* e *I* . El punto de tangencia o de contacto aparece en la imagen como el punto *P*.

## Arco

El **arco** de la circunferencia comprende una parte de la misma, aunque la porción es una curva en lugar de un segmento recto. Un ejemplo de este elemento se puede apreciar en la **figura 2.3** con los puntos *A* y *C*, los cuales forman un arco.

## Actividad de desarrollo

Responsabilidad

VALORES

TIC

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas según su relevancia y confiabilidad. |

1. En pareja, investiguen en libros, enciclopedias o internet los siguientes términos:
   - Trapecio circular.
   - Corona circular.
   - Ángulos centrales y arcos correspondientes.
   - Igualdad de ángulos y arcos.
   - Desigualdades de ángulos y arcos.
2. De acuerdo con lo investigado, respondan en su cuaderno lo siguiente:
   - El ángulo _____________ es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.
   - El ____________ correspondiente es el comprendido entre los lados del ángulo central.
   - En una misma circunferencia o en circunferencias que sean iguales los ángulos centrales y arcos son iguales. (  ) Verdadero  (  ) Falso
   - _______________ es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas.
   - _______________ es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas y dos radios.
3. Entreguen sus respuestas a su profesor.

En el video "Cómo completar cuadrados - Método fácil" se explica, de manera sencilla, cómo resolver este tipo de ecuaciones.

https://www.youtube.com/watch?v=4w1r4IHUXPI

# Representación matemática de la circunferencia

## Ecuación ordinaria de la circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal forma que siempre conserva una distancia constante con respecto a otro punto fijo en el mismo plano. El punto fijo, como ya se ha mencionado, corresponde al centro de la circunferencia, mientras que la distancia constante corresponde al tamaño del radio. Con estos elementos es posible enunciar el siguiente teorema.

**TEOREMA 2.1:** La circunferencia cuyo centro es el punto $(h, k)$ y cuyo radio es la constante $r$ tiene por ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (4)$$

Para el caso particular en que el centro de la circunferencia se encuentre en el origen, es decir, $h = k = 0$, tenemos lo siguiente:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La ecuación anterior se conoce como la **forma canónica** de la circunferencia y es la forma más simple de la ecuación ordinaria.

Por el **teorema 2.1** sabemos que, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación puede escribirse de manera inmediata.

## Ecuación general de la circunferencia

La forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia es la manera más sencilla de representar a dicho elemento geométrico. El cálculo de la misma requiere conocer el centro y el radio de la circunferencia. Existe, sin embargo, otra forma de representar la ecuación de la circunferencia, conocida como la forma general de la circunferencia, que toma como punto de partida a la forma ordinaria.

Desarrollando la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-h)^2 = r^2$, se obtiene lo siguiente:

$$x^2 + y^2 - 2hk - 2ky + h^2 + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Simplificando la ecuación anterior tenemos:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (5)$$

De la ecuación (4) es fácil advertir que:

$$D = -2h, \qquad E = -2k, \qquad F = h^2 + k^2 - r^2$$

A la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se le conoce como la **forma general** de la ecuación de la circunferencia.

**TEOREMA 2.2:** La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia de radio diferente de cero solamente si:

$$D^2 + E^2 - 4F > 0$$

Las coordenadas del centro son $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio es $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

A continuación, se demostrará la forma de pasar de la ecuación (4) a la (5). Para lo anterior se empleará el método de completar cuadrados. Como primer paso se ordenan los términos de (5), de lo que resulta lo siguiente:

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

Como segundo paso, sumamos $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$ en ambos lados de la igualdad; el resultado es:

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Factorizando el lado izquierdo de la igualdad obtenemos:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4} \quad (5)$$

Comparando las ecuaciones (4) y (6), se puede observar que el valor del segundo miembro de (6) determinará si la ecuación representa o no una circunferencia. Existen tres casos posibles por considerar:

- Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación (5) representa una circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$ la ecuación (6) representa una circunferencia de radio cero, lo que corresponde a lo que se conoce como círculo punto o círculo nulo. En otras palabras, la ecuación (6) representa un sólo punto, de coordenadas $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la ecuación (6) representa a un círculo imaginario o, dicho de otro modo, no representa un lugar geométrico.

**CURIOSIDADES**

Cuando se proporcione la ecuación general de una circunferencia es recomendable reducir la ecuación a la forma ordinaria por el método de completar cuadrados.

**Ejemplo:**
Encontrar la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, –3) y radio $r = 5$. Para dar solución a este problema se sustituye el centro y el radio en la ecuación ordinaria y se transforma a su forma general:

$(x - h)^2 + (y - k)2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - (-3))^3 + (5)^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

$x^2 - 4x + 4 + y2 + 6y + 9 = 25$

$x^2 + y^2\ 4x + 6y - 12 = 0$

Por tanto, se concluye que la ecuación general de la circunferencia dada es

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

**TIC**

En el video “Ec. gral. circunferencia, dado centro y radio | fuera origen” se muestra la forma general de la ecuación de la circunferencia, junto con algunos ejemplos.

https://www.youtube.com/watch?v=iSTj-oZA1PkPI

## Actividad de desarrollo

**VALORES** Cooperación

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad. |

**1.** En equipo de tres integrantes, realicen lo siguiente:

- En una hoja cuadriculada, de preferencia de cuadro pequeño, tracen un plano cartesiano y en él dibujen dos circunferencias. Utilicen para ello dos monedas de diferente tamaño.
- Para cada circunferencia, calculen lo siguiente:
  - El radio.
  - El diámetro.
  - Una tangente.

– Una secante.
– La ecuación ordinaria de la circunferencia.

**2.** Entreguen la hoja y los cálculos a su profesor.

# Obtención de ecuaciones de la circunferencia

En este apartado, aprenderás a resolver distintos problemas relacionados con el cálculo de circunferencias.

## Valoración de condiciones y datos

Para resolver problemas relacionados con el cálculo de la circunferencia se deben conocer dos elementos importantes:

- El centro $C$ de la circunferencia, dado en coordenadas.
- El radio $r$ de la circunferencia.

A partir de esta información se presentan los siguientes escenarios:

- Circunferencia con centro $C$ en el origen de las coordenadas, es decir, $C$ (0 ,0).
- Circunferencia con centro $C$ fuera del origen de las coordenadas, es decir, $C$ ($x$, $y$).

Recordemos también que la forma general de la ecuación de la circunferencia puede transformarse en la forma ordinaria. Por lo tanto, las condiciones necesarias para resolver un problema son semejantes.

# Formas de obtención de la ecuación de la circunferencia

En esta sección analizaremos los casos en que la circunferencia tiene centro en el origen y fuera del origen.

**CASO A:** Circunferencia con centro $C$ en el origen, $C$ (0, 0)

La **figura 2.4** ilustra el caso en el que el centro se encuentra en el origen. Los datos que se tienen son:

- Centro: $C$ (0, 0).
- Radio: $r = |x_1| = |x_3| = |-y_2| = |y_3|$ Recordemos que la distancia del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia es la misma, por lo que cualquiera de los puntos dados puede ser utilizado para indicar el valor del radio.
- Cuatro puntos a una misma distancia del centro.

Tomando en cuenta que el centro está en el origen se debe utilizar la forma canónica de la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$.

**CURIOSIDADES**

En el año 2002, el japonés Akira Haraguchi rompió el récord mundial recitando durante 13 horas 83 431 dígitos del número Pi sin parar, doblando el anterior récord en posesión del también japonés Hiroyuki Goto. El 4 de octubre de 2006, a la 1:30 de la madrugada, y tras 16 horas y media, Haraguchi volvió a romper su propio récord recitando 100 000 dígitos del número Pi, realizando una parada cada dos horas de 10 minutos para tomar aire.

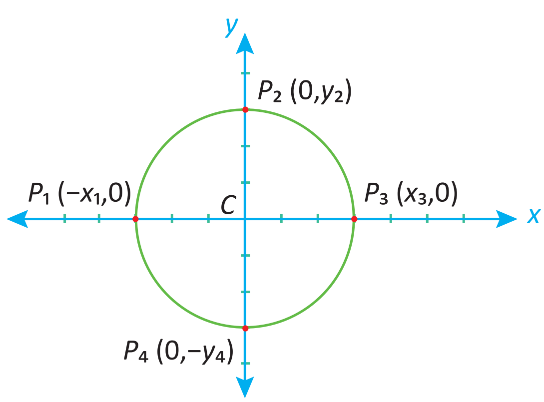



Figura 2.4. Circunferencia con centro $C$ en el origen y cuatro puntos dados.

Otro caso que se presenta cuando el centro se encuentra en el origen es tener sólo un punto *P* con coordenadas *x* y *y* diferentes de cero. Entonces, los datos que se tienen son:

- Centro: *C* (0,0).
- El radio *r* es desconocido pero es posible calcularlo utilizando el punto *P* como referencia.

El radio puede calcularse utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos. De esta manera:

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$r=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

Una vez resuelta la ecuación basta con aplicar, como antes, la forma canónica de la ecuación de la circunferencia.

Otra situación que se puede presentar es que el problema describa dos puntos opuestos de la circunferencia, cuya distancia corresponde al diámetro de la misma. Para solucionar esta otra situación se procede como en el caso anterior sólo que el cálculo de la distancia será entre dos puntos de la circunferencia y no entre un punto y el centro. Entonces:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

En este caso *d* representa al diámetro, así que:

$$r=\frac{d}{2}$$

Con esta información ya es posible aplicar la forma canónica de la ecuación de la recta.

Por último, otro caso que se puede presentar es cuando se tiene como dato adicional el valor del área del círculo delimitado por la circunferencia con centro en el origen.

El área del círculo está dada por la siguiente ecuación:

$$A=\pi\bullet r^2$$

Dado que el dato que se conoce es precisamente el área del círculo, al despejar la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{A}{\pi}=r^2$$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}}=r^2$$

Una vez descubierto el valor del radio ya es posible aplicar la forma canónica de la ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2=r^2$.

**NO ABANDONO**

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber".

Albert Einstein

Como ejemplo, supongamos que el área del círculo es $A = 10$ y que corresponde a una circunferencia centrada en el origen; entonces: $10=\pi\bullet r^2$

$$\frac{10}{\pi}=r^2$$

$$\sqrt{\frac{10}{\pi}}=r$$

$$r\approx 1.78$$

Aplicando esta información a la forma canónica de la circunferencia, obtenemos:

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x^2+y^2=(1.78)^2$$

$$x^2+y^2=\frac{10}{\pi}$$

Cuando se tienen como datos iniciales el centro y el radio (o el diámetro) de la circunferencia el problema se reduce a encontrar los puntos que satisfacen la ecuación. Recordemos que la ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ahora veremos por qué tiene esta forma la ecuación ordinaria. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio $r$. Entonces, de acuerdo con la definición de circunferencia, el punto $P$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$|\overline{CP}|=r$$

Al recordar la ecuación de la distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

La ecuación canónica es casi igual que la ecuación ordinaria, con la diferencia que el centro está situado en el origen $C(0,0)$. De esta manera, la ecuación canónica tiene la forma:

$$x^2+y^2=r^2$$

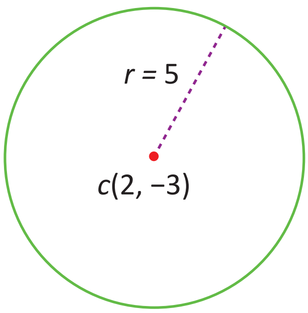


Figura 2.5. Circunferencia con centro distinto al origen.

**CASO B:** Ecuación de la circunferencia con centro $C$ fuera del origen.

Para obtener la forma general de la circunferencia se pueden utilizar dos métodos:

- Método por desarrollo.
- Método con las fórmulas conocidas.

Para ilustrar ambos métodos, vamos a considerar la **figura 2.5**, que muestra una circunferencia con centro $C(2, -3)$ y radio $r = 5$.

## Método por desarrollo

Dado que conocemos el centro y el radio de la circunferencia, es posible aplicar directamente la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. De esta manera, tenemos:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=5^2$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

Al desarrollar los binomios tenemos:

$$(x-2)(x-2)+(y+3)(y+3)=25$$

$$(x^2-2x-2x+4)+(y^2+3y+3y+9)=25$$

$$(x^2-4x+\ 4)+(y^2+6y+9)=25$$

Antes de continuar con el desarrollo, recordemos la forma general de la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Entonces, ordenando la ecuación anterior de acuerdo con la forma general obtenemos:

$$x^2+y^2-4x+6y=13-25=0$$

$$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

Esta última ecuación representa la forma general de la ecuación de la circunferencia con centro $C$ en $(2, -3)$ y radio $r = 5$.

### Método con las fórmulas conocidas

Regresando a la definición del problema, conocemos que el centro está ubicado en el punto $(2, -3)$ así como que el radio es $r = 5$.

Si $h=-\frac{D}{2}$, entonces $D=-2h$, y si $k=-\frac{E}{2}$, entonces $E=-2k$. Además, si $r=\sqrt{(h^2+k^2-F)}$, entonces $F=h^2+k^2-r^2$.

Dado que $C(3, -3)$ corresponde a $C(h, k)$, se tiene que:

$$D=-2h=-2(2)=4$$
$$E=-2k=-2(-3)=6$$
$$F=h^2+k^2-r^2=2^2+(-3)^2-25^2=4+9-25=-12$$

Estos datos se sustituyen en la forma general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$x^2+y^2+4x+6y-12=0$$

De esta forma, obtenemos la forma general de la ecuación de la circunferencia.

**NO ABANDONO**

"Cualquier persona que deja de aprender es viejo, ya sea a los veinte o a los ochenta. Cualquiera que sigue aprendiendo se mantiene joven. La cosa más grande en la vida es mantener la mente joven".

Henry Ford

## Ecuación de la circunferencia dados tres puntos

En la ecuación ordinaria de la circunferencia, $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, hay tres constantes independientes: $h$, $k$ y $r$. De manera semejante, en la ecuación general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

existen tres constantes independientes, $D$, $E$ y $F$. Recordemos que la ecuación de toda circunferencia puede escribirse mediante la forma general o bien la forma ordinaria. Así, la ecuación de cualquier circunferencia puede obtenerse determinando los valores de tres constantes. Lo anterior requiere de tres ecuaciones independientes, las cuales se obtienen a partir de tres condiciones también independientes. Por lo tanto, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes.

Veamos lo anterior a través del siguiente ejemplo: determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1, 1)$ y $C(5, -3)$. Para comenzar, supongamos que la ecuación buscada está en la forma general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

De esa manera, deben determinarse las constantes $D$, $E$ y $F$.

Dado que los puntos proporcionados están en la circunferencia, éstos deben satisfacer la forma general de la circunferencia. Según lo expuesto, es posible construir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (-1, 1)\text{: } 1+1-D+E+F=0 \\ (3, 5)\text{: } 9+25+3D+5E+F=0 \\ (5, -3)\text{: } 25+9+5D-3E+F=0 \end{cases}$$

Al simplificar, obtenemos:

$$\begin{cases} D-E-F=2 \\ 3D+5E+F=-34 \\ 5D-3E+F=-34 \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da:

$$D=-\frac{32}{5},\ E=-\frac{8}{5},\ F=-\frac{34}{5}$$

Ahora bien, cuando se sustituyen estos valores en la forma general, tenemos:

$$x^2+y^2-\frac{32}{5}x-\frac{8}{5}y-\frac{34}{5}=0$$
$$5x^2+5y^2-32x-8y-34=0$$

De esta manera, se ha obtenido la forma general de la ecuación de la circunferencia. Para obtener el centro y el radio se debe reducir esta forma general a su forma ordinaria:

$$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{442}{25}$$

De la expresión anterior es fácil advertir que el centro es $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y el radio es $\frac{1}{5}\sqrt{442}$.

## Actividad de desarrollo

Solidaridad

VALORES

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. |
| ATRIBUTO | • Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez |

**1.** En pareja, realicen lo siguiente:

- Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos (6,2) y (8,0), y cuyo centro está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$.
- Discutan el procedimiento a utilizar y generen el algoritmo para dar solución al problema planteado.
- Sigan el algoritmo que desarrollaron para encontrar la respuesta al problema.
- Grafiquen la circunferencia indicando el centro, el radio y los dos puntos dados.

**2.** Comparen sus resultados con el resto de parejas del grupo.

**NO ABANDONO**

"Profundiza lo suficiente en cualquier cosa y encontrarás las matemáticas".
Dean Schlicter

# Solución de problemas cotidianos, empleando la circunferencia

En esta sección aprenderás a resolver problemas prácticos de la vida diaria a través del cálculo de circunferencias.

## Familia de circunferencias

En temas anteriores se demostró que una circunferencia y su ecuación se determinan, cada una de ellas, por tres condiciones independientes. Una circunferencia que satisface menos de tres condiciones independientes no es única. La ecuación de la circunferencia que satisface únicamente a dos condiciones independientes contiene una constante arbitraria llamada parámetro. Entonces, dicha ecuación representa a una familia de circunferencias de un parámetro. Por ejemplo, la familia de todas las circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto (1,2) tiene por ecuación:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=k^2$$

donde el parámetro $k$ es cualquier número positivo.

Consideremos ahora el caso de las familias de circunferencias que pasan por las intersecciones de dos circunferencias dadas.

**TEOREMA 2.3:** Si las ecuaciones de dos circunferencias dadas cualesquiera $C_1$ y $C_2$ son:

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$
$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

Entonces la ecuación:

$$C_3: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

representa una familia de circunferencias que tienen su centro en la recta de los centros de $C_1$ y $C_2$.

Para este tipo de familias se deben considerar los siguientes casos:

- Si $C_1$ y $C_2$ se intersecan en dos puntos diferentes, la ecuación representa todas las circunferencias que pasan por los puntos de intersección $C_1$ y $C_2$, considerando a $k \neq -1$.
- Si $C_1$ y $C_2$ son tangentes entre sí, la ecuación representa, para todos los valores de $k \neq -1$, todas las circunferencias que son tangentes a $C_1$ y $C_2$ en el punto de intersección.
- Si $C_1$ y $C_2$ no tienen ningún punto común, la ecuación representa una circunferencia para cada valor de $k \neq -1$. Ningún par de circunferencias de la familia tiene así un punto común con alguna de las dos circunferencias $C_1$ o $C_2$.

**NO ABANDONO**

"Una experiencia nunca es un fracaso, pues siempre viene a demostrar algo".
Thomas Alva Edison

Ilustremos lo anterior con el siguiente ejemplo: escribir la ecuación de la familia de circunferencias $C_3$ cuyos miembros pasan por la intersección de las circunferencias $C_1$ y $C_2$, representadas por las ecuaciones:

$$C_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 12x - 2y + 29 = 0$$

Asimismo, encontrar el miembro de la familia $C_3$ que pasa por el punto (7,0).

Para comenzar, debemos tomar en cuenta que el **teorema 2.3** utiliza $k$ como parámetro; por tanto:

$$C_3: (x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5) + k(x^2 + y^2 - 12x + 2y + 29 = 0$$

Dado que conocemos el punto de intersección, el siguiente paso es cambiar $x$ por 7 y $y$ por 0.

$$(7^2 + 0^2 - 6(7) + 2(0) + 5) + k(7^2 + 0^2 - 12(7) + 2(0) + 29) = 0$$

$$(49 - 42 + 5) + k(49 - 84 + 29) = 0$$

$$12 + k(-6) = 0$$

$$K = 2$$

Al sustituir el valor encontrado para $k$ en $C_3$, tenemos:

$$C_3: 3x^2 + 3y^2 - 30x - 2y + 63 = 0$$

A partir de esta expresión podemos deducir el centro y el radio, factorizando la ecuación:

$$C_3: (x - 5)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{37}{9}$$

Por tanto, el miembro requerido de la familia de circunferencias tiene su centro en $\left(5, \frac{1}{3}\right)$ y un radio igual a $\sqrt{\frac{37}{3}}$

## Problemas de aplicación

Comencemos este apartado con el planteamiento de un problema en particular: demostrar, analíticamente, que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

La demostración no perderá generalidad si tomamos como centro de la semicircunferencia el origen, tal y como se muestra en la **figura 2.6.** La ecuación de la semicircunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La anterior ecuación es la forma canónica de la circunferencia. Ahora bien, sean $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la semicircunferencia y $A$ y $B$ los puntos extremos del diámetro de la semicircunferencia. De esta manera, las coordenadas de $A$ y $B$ son $(-r, 0)$ y $(r, 0)$, respectivamente. Como primer paso se necesita demostrar que el segmento $P_1A$ es perpendicular al segmento $P_1B$. Lo anterior quiere decir que, si las pendientes de $P_1A$ y $P_1B$ son $m_1$ y $m_2$, respectivamente, se requiere demostrar que:

$$m_1 m_2 = -1$$

como establece la condición de perpendicularidad vista en la unidad anterior. En consecuencia:

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1 + r}, \qquad m_2 = \frac{y_1}{x_1 - r}$$

De las expresiones anteriores se concluye que:

$$m_1 m_2 = \frac{y_1^2}{x_1^2 - r^2}$$

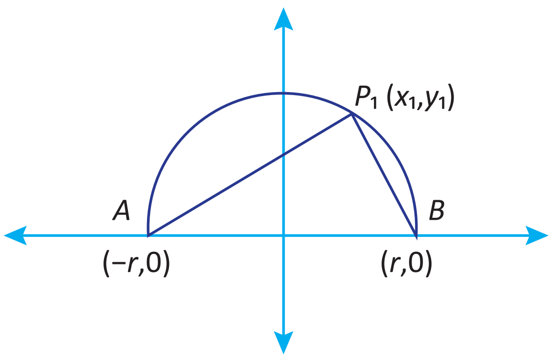



Figura 2.6. Ángulo inscrito en una semicircunferencia.

Sin embargo, sabemos que $P_1$ está sobre la semicircunferencia y que sus coordenadas son $(x_1, y_1)$, por lo que deben satisfacer su ecuación. De esta manera, tenemos:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

De donde:

$$x_1^2 - r^2 = -y_1^2$$

No es difícil ver que esta última ecuación corresponde a la condición de perpendicularidad dada anteriormente, lo que completa la demostración.

# Graficado de la circunferencia

En otros temas de esta unidad hemos estudiado las fórmulas de la circunferencia y se han presentado las gráficas correspondientes a algunas de estas fórmulas. En esta sección, se explicará brevemente cómo graficar dichas funciones utilizando la herramienta de Microsoft Excel.

Es importante resaltar que la aplicación no se encargará de encontrar la solución a un problema, sino que sirve de apoyo para la visualización de los datos.

Los siguientes pasos ilustran cómo graficar la ecuación de una circunferencia en Excel:

1. El primer paso corresponde a tener la ecuación lista. Para este ejemplo utilizaremos la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$, pero en su forma simplificada: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
2. Abrir la aplicación Excel.
3. En la celda [A1] insertar la ecuación como leyenda de la celda, esto es: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
4. El siguiente paso consiste en despejar $y$ de la ecuación:

$$(y+3)^2 = 25 - (x-2)^2$$

$$y + 3 = \sqrt{25 - (x-2)^2}$$

$$y = \sqrt{25 - (x-2)^2 - 3}$$

5. Encontrar las raíces de $y$ utilizando la ecuación general:

$$y = \pm\sqrt{25 - (x-2)^2} - 3$$

$$y_1 = \sqrt{25 - (x-2)^2} - 3$$

$$y_2 = -\sqrt{25 - (x-2)^2} - 3$$

6. En las celdas [A3], [B3] y [C3] colocamos las leyendas $X$, $Y1$ y $Y2$, respectivamente. Donde, $Y1$ y $Y2$ son los resultados de las raíces antes mencionadas.

7. A partir de la celda [A4] a la celda [A37] insertamos la serie de números que va de [–3 –7]. El incremento entre cada número es de 0.4. Se recomienda hacer el incremento manual debido a problemas encontrados al hacerlo de manera automática.
8. En la celda [B4] insertamos la siguiente fórmula: =RAIZ(25–A4–2)$^2$) –5. Esta fórmula corresponde a la primera raíz de *y*.
9. Copiamos la fórmula anterior en las celdas inferiores considerando que la fórmula esté asociada al valor correspondiente de la fila en la columna [A]. Por ejemplo, para la fila [B5] le corresponde el valor de la columna [A5] y así sucesivamente.
10. En la celda [C4] insertamos la siguiente fórmula: = –RAIZ(25V –(A4 2)$^2$) –5. Esta fórmula corresponde a la segunda raíz de *y*.
11. Se sigue la misma instrucción que en el paso 9.
12. Seleccionamos todos los valores numéricos.
13. Se debe buscar el menú de INSERTAR / Gráficos / Dispersión / Dispersión con líneas suavizadas y marcadores.
14. De esta manera se dibujará la figura 2.7.

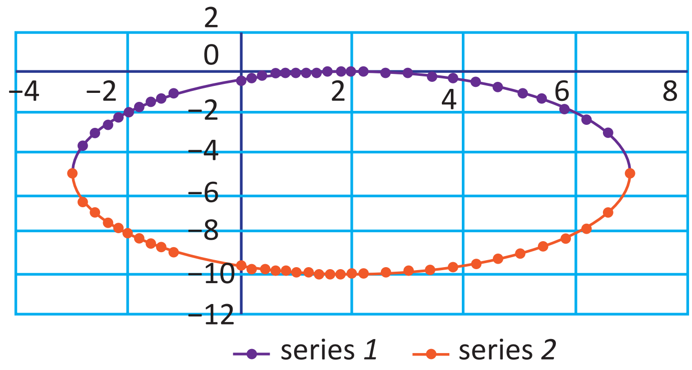



Figura 2.7. Ejemplo de gráfica en Microsoft Excel.

Como se puede observar la figura parece ser una elipse pero en realidad tal perspectiva se debe a la proporción del eje *x* y *y*.

Ante este caso sólo basta con redimensionar la figura para obtener el resultado esperado, como se muestra en la figura 2.8.

Los pasos mostrados son un ejemplo de cómo se puede generar una gráfica utilizando la herramienta Excel, sin embargo, existen muchas otras opciones en línea que también se pueden utilizar para graficar una función.

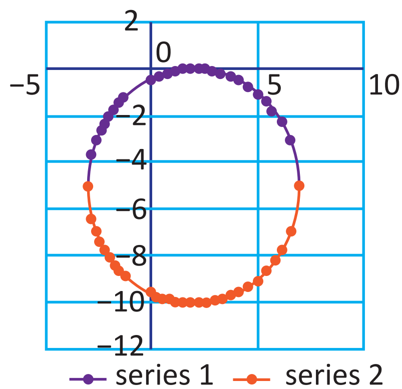



Figura 2.8. Ejemplo de gráfica en Microsoft Excel redimensionada.

## Actividad de cierre

Confianza

VALORES

TIC

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez. |

**1.** En equipo de tres integrantes, realicen los siguientes ejercicios:

- Dibujen una circunferencia con centro en el origen y con radio $r = 15$.
- Para la circunferencia anterior, tracen:
  – Un arco.
  – Una secante.
  – Una semicircunferencia.
- Encuentren la forma general de la ecuación de la circunferencia.
- Conviertan el resultado de la forma general a la forma ordinaria.
- Realicen las gráficas en Excel.

**2.** Entreguen sus resultados a su profesor.

## Recapitulación

Preevaluación

**Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 2.1" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.**

1. Completa cada concepto escribiendo su definición.

Elementos de circunferencia

- Arco:
- Cuerda:
- Diámetro:
- Secante:
- Tangente:
- Segmento circular:

**Realiza tu evaluación parcial.**

1. Relaciona, mediante una línea, las ecuaciones con su nombre correcto.

Representación gráfica de la circunferencia

| | |
|---|---|
| $x^2 + y^2 = r^2$ | Forma canónica de la ecuación de la circunferencia. |
| $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ | Forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. |
| $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ | Forma general de la ecuación de la circunferencia. |

**Valor: 3 puntos**

# Actividad de evaluación 2.1.1

Laboriosidad

VALORES

EVALUACIÓN

TIC

RÚBRICA

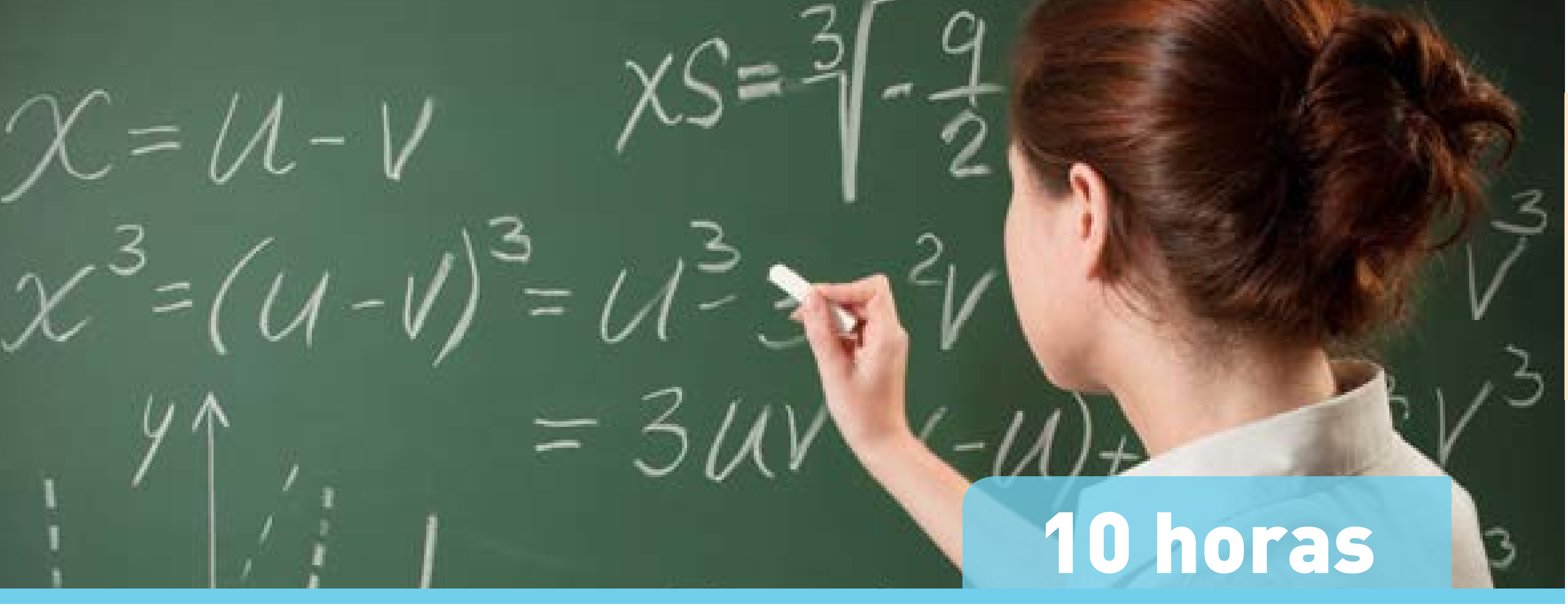
**COMPETENCIAS**

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

**ATRIBUTO**

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

1. De manera individual, representa gráficamente la circunferencia, a partir del análisis de su ecuación y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno. Para ello, haz lo siguiente:
2. Gráfica de la circunferencia con centro en el origen.
   1) Hallar la ecuación de la circunferencia de cada uno de los siguientes casos:
      a. $C(0,0)$, $r = 3$ b. $C(0,0)$, $r = -2$ c. $C(0,0)$, $r = 2\frac{1}{5}$
   2) Hallar el centro y el radio de las circunferencias de los siguientes casos y generar la gráfica correspondiente:
      a. $x^2 + y^2 = 144$ b. $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$ c. $x^2 + y^2 = 100$
   3) Calcula la ecuación de dos circunferencias con centro en el origen solicitadas por tu profesor y realiza su representación gráfica.
   4) Plantea y resuelve un problema de la vida cotidiana, en donde apliques la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.
3. Gráfica de la circunferencia con centro fuera del origen.
   1) Determina la ecuación de la circunferencia generando la gráfica correspondiente a cada caso:
      a. $C(-2,0)$, $r = 2$ b. $C(3,0)$, $r = 2\frac{1}{2}$ c. $C(4,0)$, $r = 0.25$
   2) Calcula la ecuación de la circunferencia y grafica el resultado correspondiente:
      a. $C(-2,0)$, $r = 2$ b. $C(3,0)$, $r = 1\frac{1}{2}$ c. $C(4,0)$, $r = 0.25$
   3) Determina la ecuación general de cada circunferencia con su respectiva gráfica:
      a. $x^2 + (y-3)^2 = 8$ b. $x^2 + (y+2)^2 = 3$ c. $x^2 + (y-5)^2 = 4$
   4) Identifica los diferentes procedimientos que seguiste para encontrar la solución de cada uno de los problemas anteriores. Redacta, de manera general, cada uno de los diferentes procedimientos que seguiste.
   5) Calcula dos ecuaciones con centro fuera del origen solicitadas por tu profesor y realiza su representación gráfica; además, describe por escrito el desarrollo del procedimiento efectuado.
   6) Plantea y resuelve un problema de la vida cotidiana en donde apliques las ecuaciones de la circunferencia con centro fuera del origen.
4. Gráfica de la circunferencia dados tres puntos.
   1) Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos (3, 5), (–3,1) y (1, 5).
      a) Determina el centro de la circunferencia.
      b) Determina la longitud del radio.
      c) Simplifica la ecuación general a su forma ordinaria o canónica.
      d) Elabora la gráfica correspondiente utilizando una hoja milimétrica.
      e) Finalmente, grafica la ecuación utilizando el programa Microsoft Excel.
5. Pasa a hojas blancas el trabajo realizado en los puntos 2, 3 y 4, con limpieza incluyendo el título de cada punto, no olvides hacer una portada con tus datos y anexar la gráfica de Exel impresa y en USB o CD.
6. Antes de entregar tus resultados a tu profesor, realiza la Rúbrica 2.1.1, de tu “Autoevaluación” que se encuentra al final de esta unidad en la sección “Instrumentos de evaluación”. Revisa si cumples con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de presentarlo.
7. Entrega tu trabajo al profesor.



10 horas

# 2.2 Representa gráficamente la parábola, mediante su ecuación o elementos que la integran

Si acudimos al diccionario, éste dice que parábola significa “comparación”, y es el sentido que se utiliza cuando se habla de una narración con una enseñanza moral. Sin embargo, en matemáticas tiene un significado distinto, aunque la idea de igualdad que proporciona el término “comparación” tiene algo de aplicación. En esta sección describiremos cómo se construye y qué elementos constituyen la curva denominada parábola.

## Representación gráfica y elementos de la parábola

En esta sección, estudiarás a detalle cada uno de los elementos que conforman una parábola y cómo representarla gráficamente.

### Actividad de inicio

Respeto — VALORES

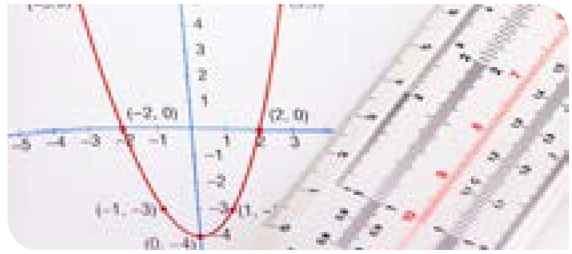
| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
| ATRIBUTO | • Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas. |

TIC

1. En pareja, a través de libros y fuentes de internet, realicen las siguientes actividades:
2. Investiguen el significado de los siguientes términos:
   - Parábola.
   - Foco.
   - Directriz.
   - Vértice.

3. Una vez recabada la información, tracen una circunferencia de cualquier tamaño de radio, así como una parábola de cualquier tamaño. Para simplificar el proceso, intenten que ambas figuras sean de un tamaño similar, y determinen las diferencias entre ellas.
4. Listen tres actividades físicas que permitan crear una trayectoria en forma de parábola, y describan el proceso.
5. Discutan sus respuestas de manera grupal y hagan una demostración de una de las actividades físicas que plantearon.

## La parábola como lugar geométrico




Una **parábola** es el lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve en un plano de tal manera que su distancia con respecto a una recta fija $l$ (directriz), situada en el mismo plano, es siempre igual a su distancia con respecto a un punto fijo $F$ (foco) del plano y que no pertenece a la recta. En los siguientes ejemplos veremos cómo emplear estas definiciones para encontrar la ecuación que corresponde a esta curva.

**Ejemplo 1:**
Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto $F(0, 3)$ y de la recta $y + 3 = 0$.

Para comenzar con la solución de este problema necesitamos la fórmula para medir la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Además, requerimos la fórmula para calcular la distancia a un punto de una recta:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

A partir de estas ecuaciones se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a $F$ y a la recta:

$$PF = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}, \qquad PD = \frac{y+3}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Al igualar la distancia del punto $P$ al foco $F$ con la distancia del mismo punto $P$ con la directriz $D$, obtenemos:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 3$$

El uso de un poco de álgebra permite escribir:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (y+3)^2$$

El resultado que se obtiene corresponde a la ecuación del lugar geométrico solicitado, al que denominamos parábola:

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$
$$x^2 - 12y = 0$$

**Ejemplo 2:**
Determinar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al punto $P(2, 1)$ siempre es igual a su distancia a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Como en el ejemplo anterior, el primer paso es obtener las distancias correspondientes:

$$PF = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}, \qquad PD = \frac{x + 2y - 3}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

Cuando se igualan las distancias dadas por las expresiones anteriores obtenemos la siguiente ecuación:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}}$$

TIC

Visita la siguiente liga y grafica parábolas de manera creativa.

http://sacrmatematica.blogspot.mx/2008/07/la-parabola.html

Al elevar al cuadrado ambos términos de la igualdad, llegamos a la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)^2=\left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

Con un poco de álgebra es posible reducir los términos semejantes, con lo que obtenemos:

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=\frac{x^2+4y^2+9+4xy-6x-12y}{5}$$
$$5x^2+5y^2-20x-10y+25=x^2+4y^2+9+4xy-6x-12y$$
$$4x^2-4xy+y^2-14x+2y+16=0$$

Esta última ecuación representa el resultado del problema.

# Elementos de la parábola

Los elementos de una parábola, ilustrados en la **figura 2.9**, son: foco, directriz, radio focal, eje, parámetro, vértice, cuerda, cuerda focal y lado recto. Las descripciones de cada uno de ellos se presentan a continuación.

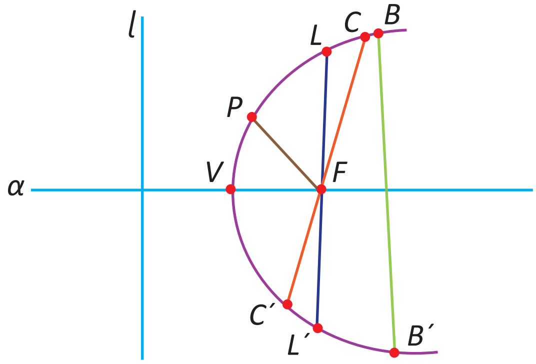


Figura 2.9. Elementos de la parábola.

## Foco

El foco es el punto fijo en el plano que no pertenece a la parábola, representado por el punto $F$ en la **figura 2.9**.

## Directriz

Es una recta fija en el plano y, al igual que el foco, no pertenece a la parábola, representada por la recta $l$ en la **figura 2.9**.

## Radio focal o radio vector

Si $P$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces el radio focal o radio vector es la recta $FP$ que une el foco $F$ con el punto $P$; este elemento se ilustra en la **figura 2.9** con el segmento ($\overline{PF}$).

## Eje de la parábola

Su símbolo es $\alpha$. En la **figura 2.9** es la recta $\alpha$ que pasa por $F$ y es perpendicular a $l$.

## Parámetro

Es la distancia del foco $F$ a la recta directriz $l$, y se designa con la letra $p$.

## Vértice

Es el punto de intersección de la parábola con su eje, y está ubicado justo en la mitad del segmento del eje de la parábola que une el foco con la recta directriz. En la **figura 2.9** aparece representado como $V$.

## Cuerda

Es el segmento de recta, como $\overline{BB'}$ en la **figura 2.9**, que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola.

## Cuerda focal

Es una cuerda que pasa por el foco, como $CC'$ en la **figura 2.9**.

## Lado recto

Es la cuerda focal perpendicular al eje, como $LL'$en la **figura 2.9**. La longitud del lado recto se puede determinar mediante las coordenadas de sus extremos. Al sustituir $a$ por $x$ en la ecuación $y^2 = 4ax$, que abordaremos más adelante en este libro, se encuentra que:

$$y^2 = 4a^2, \quad y = \pm 2a$$

Por tanto, los extremos del lado recto son $(a, -2a)$ y $(a, 2a)$, lo que a su vez hace que su longitud sea igual a $4a$.

TIC

Ve el video "Concepto de parábola y sus elementos" y reafirma tus conocimientos sobre este tema.

http://www.youtube.com/watch?v=_YOPO4mtl_s&feature=relmfu

## Actividad de desarrollo

Ética

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

ATRIBUTO

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

**1.** De manera individual, resuelve los siguientes ejercicios.

1) En el dibujo de la parábola identifica qué puntos corresponden a su foco y a su vértice. Describe con tus propias palabras qué representan cada uno de los elementos de la parábola.

2) Grafica las siguientes parábolas en tu cuaderno:

a) $y = 2x - 4 + x^2$

b) $y = 4x^2 + 4x + 1y$

c) $y = (x - 1)^2$

**2.** Compara tus respuestas con otro compañero y corrijan cualquier discrepancia con ayuda del profesor.

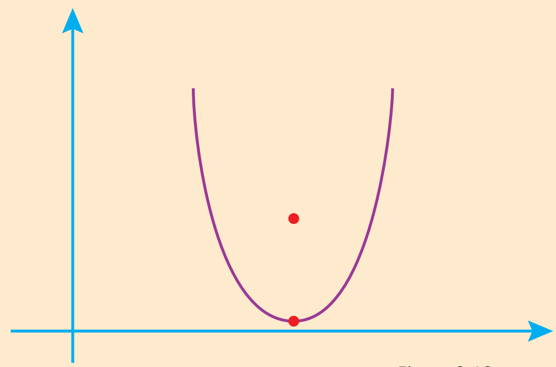


Figura 2.10

# Tipos de parábolas

En esta sección describiremos brevemente cada una de las parábolas según su ubicación con respecto al origen del plano cartesiano o coordenado. Para cada uno de los tipos, se dará una breve reseña de sus fórmulas, que abordaremos a fondo más adelante.

**Glosario**

**Cóncavo:** que tiene, respecto del que mira, una forma curva más hundida en el centro que en los bordes.

## Vertical con vértice en el origen y fuera del origen

**Con vértice en el origen**

Su foco esta sobre el eje $y$ y son **cóncavas** hacia arriba o hacia abajo. La **figura 2.11** ilustra este tipo de parábolas.

Ecuación canónica:

$$x^2 = 4py$$

Foco: $F(0, p)$

Directriz $(l)$: $y = -p$

Ecuación del eje: $x = 0$

Lado recto $LL' = |4p|$

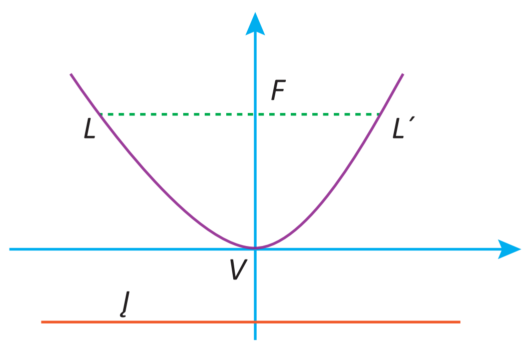



Figura 2.11. Parábola vertical con vértice en el origen.

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

**Con vértice fuera del origen**

Como en el caso anterior, su eje es paralelo al eje $y$ son cóncavas hacia arriba o hacia abajo. La **figura 2.12** ejemplifica una parábola de este tipo.

Ecuación canónica:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Ecuación general:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

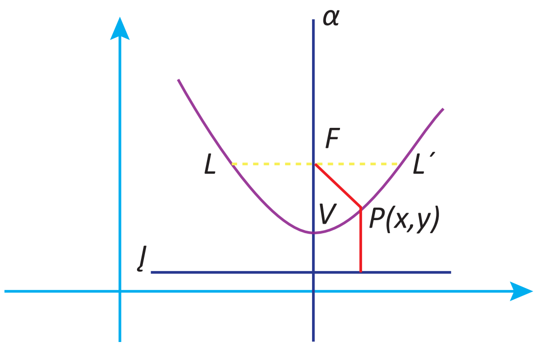


Figura 2.12. Parábola vertical con vértice en ($h$,$k$).

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h, k + p)$

Directriz ($l$): $x = k - p$

Ecuación del eje: $x = h$

Lado recto $LL' = |4p|$

**Concavidad**

- Si $p > 0$, entonces, la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$, entonces, la parábola es cóncava hacia abajo.

## Parábolas horizontales, con vértice en y fuera del origen

**Con vértice en el origen**

El foco de este tipo de parábola está sobre el eje $x$ y son cóncavas hacia la derecha o a la izquierda. La **figura 2.13** describe este tipo de parábola.

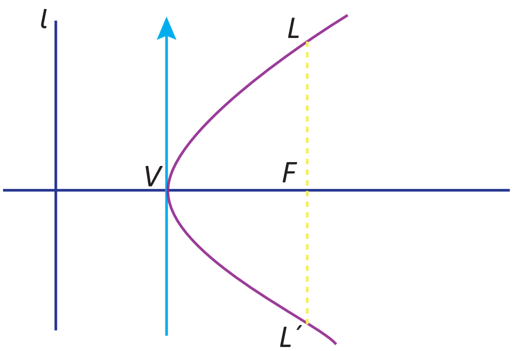


Figura 2.13. Parábola horizontal con vértice en el origen.

Ecuación canónica:

$$y^2 = 4px$$

Foco: $F(p, 0)$

Directriz ($l$): $x = -p$

Ecuación del eje: $y = 0$

Lado recto $LL' = |4p|$

**Concavidad**

- Si $p > 0$, entonces, la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p < 0$, entonces, la parábola abre hacia la izquierda.

**Con vértice fuera del origen**

En esta parábola su eje es paralelo al eje $x$ y es cóncava hacia la derecha o izquierda. La **figura 2.14** muestra un ejemplo de una parábola horizontal con centro fuera del origen.

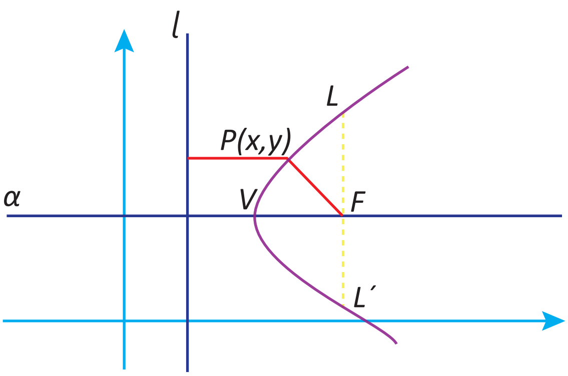


Figura 2.14. Parábola horizontal con vértice en ($h$, $k$).

Ecuación canónica:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación general:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h + p, k)$

Directriz ($l$): $x = h - p$

Ecuación del eje: $y = k$

Lado recto $LL' = |4p|$

**Concavidad**

- Si $p > 0$, entonces, la parábola es cóncava hacia la derecha.
- Si $p < 0$, entonces, la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Cada uno de los diferentes tipos de parábola está bien definido, por lo que resulta recomendable llevar a cabo el graficado de cualquier problema relacionado con parábolas para determinar a qué tipo pertenece. Con la información de la gráfica se podrá tener una mejor noción sobre qué fórmula aplicar y cómo calcular los elementos de la parábola.

# Representación matemática de la parábola

## Ecuación ordinaria o canónica de la parábola

Como hemos visto, la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados.

Comenzaremos enunciando el siguiente teorema con respecto a la ecuación ordinaria o canónica de la parábola.

**TEOREMA 2.4:** La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en $(p, 0)$ es:

$$y^2 = 4px$$

La parábola abre hacia la derecha si $p > 0$ y abre hacia la izquierda si $p < 0$, figura 2.16 a) y b). Por su parte, la ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en $(0, p)$ es:

$$x^2 = 4py$$

La parábola abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$, **figura 2.16** c) y d). A este par de ecuaciones se les conoce como **primera ecuación ordinaria de la parábola**. Además, dado que son las ecuaciones más simples de la parábola, también son conocidas como **formas canónicas o reducidas**.

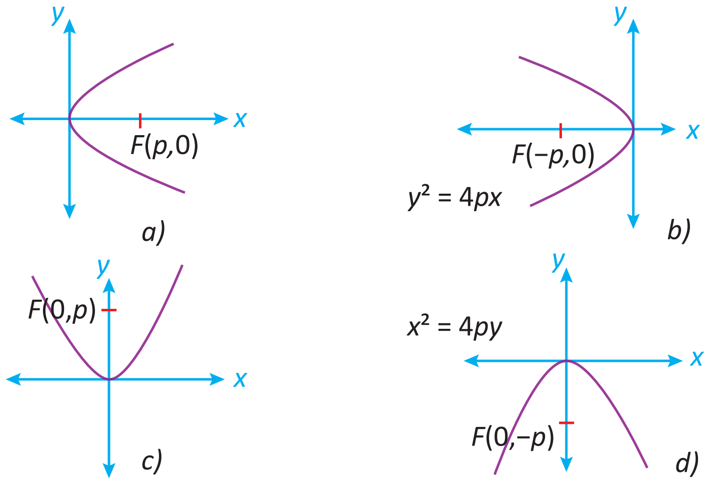



Figura 2.16. Ejemplo de parábolas con vértice en el origen y foco en: a) $(p, 0)$, b)$(-p, 0)$, c) $(0, p)$ y d) $(0, -p)$.

**Ejemplo 1:**

Escribir la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (0, 4).

La solución del problema planteado viene dada por la siguiente ecuación:

$$x^2 = 4py$$

La distancia del vértice al foco es 4 y, por tanto, $p = 4$. Sustituyendo este valor en el lugar de $p$, se obtiene la ecuación pedida de la parábola:

$$x^2 = 16\,y$$

**Ejemplo 2:**

Una parábola tiene su centro en el origen, su eje se extiende a lo largo del eje de las abscisas y pasa por el punto (–3, 6). Encontrar su ecuación.

La ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = 4px$. Para determinar el valor de $4p$, se sustituyen las coordenadas del punto dado. Así:

$$36 = 4p(-3) \quad \text{y} \quad 4p = -12$$

La ecuación requerida es entonces $y^2 = -12x$. El foco está en (–3, 0) y el punto dado es el extremo superior del lado recto.

Con frecuencia, necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, aunque no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con lo anterior, considera la **figura 2.17**, donde se muestra una parábola cuyo vértice es el punto $(h, k)$ y cuyo eje es paralelo al eje $x$. Si trasladamos los ejes del plano cartesiano.

Si trasladamos los ejes del plano cartesiano o coordenado de tal manera que el nuevo origen coincida con el vértice, entonces, la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes y está dada por:

El siguiente teorema determina la ecuación de una parábola cuando su vértice está fuera del origen.

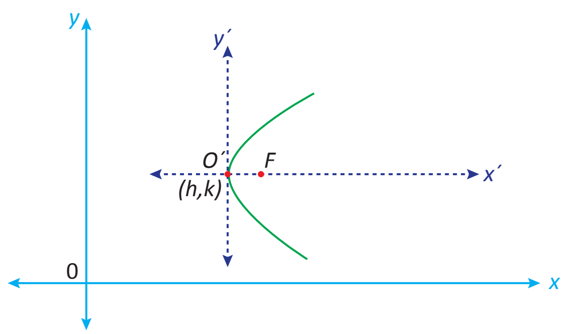



Figura 2.17. Gráfica de la ecuación de la parábola con vértice en $(h, k)$.

**TEOREMA 2.5:** La ecuación de una parábola de vértice $(h, k)$ y eje paralelo al eje $x$ es de la forma:

$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$

siendo la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda. Una consideración similar aplica para la parábola con vértice $(h, k)$ y eje paralelo al eje $y$:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. El par de ecuaciones anteriores se conocen como la **segunda ecuación ordinaria de la parábola**.

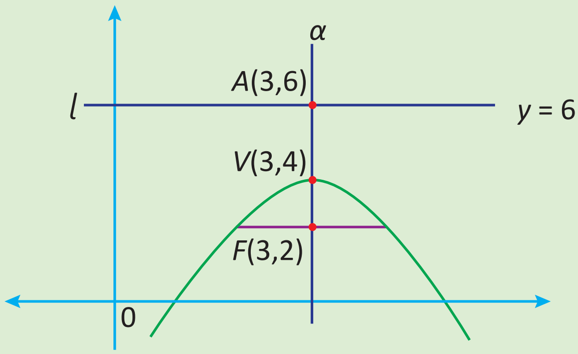



Figura 2.18. Ejemplo de una parábola con centro en $(h, k)$.

**Ejemplo 1:**

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3, 4)$ y cuyo foco es el punto $(3, 2)$.

Dado que el vértice $V$ y el foco $F$ de una parábola están sobre su eje, y que cada uno de los puntos tiene la misma abscisa, se concluye que el eje $a$ de la parábola es paralelo al eje $y$, tal y como se muestra en la **figura 2.18**.

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

Como el vértice $V$ es el punto $(3, 4)$, la ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$(x - 3)^2 = 4p\,(y - 4)$$

Ahora bien, $|p| = |FV| = |4 - 2| = 2$, pero el foco $F$ está abajo del vértice $V$, lo cual quiere decir que la parábola abre hacia abajo y $p$ es negativa. Por lo tanto, $p = -2$ y la ecuación de la parábola es:

$$(x - 3)^2 = -8(y - 4)$$

**Ejemplo 2:**

Deducir la ecuación de la parábola con vértice en $V(-3, -1)$ y directriz $l = 3$.

Debido a los puntos dados en el problema, deducimos que la parábola es cóncava hacia abajo, por lo que su ecuación es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Además, se debe observar que el vértice está 4 unidades debajo de la directriz, lo que indica que la solución adecuada de $|p| = 4$ es $p = -4$. Al sustituir $h = -3$, $k = -1$ y $p = -4$ en la ecuación anterior, obtenemos lo siguiente:

$$(x - (-3))2 = 4(-4)(y - (-1))$$

$$(x + 3)2 = -16(y + 1)$$

Esta última ecuación es la respuesta solicitada.

# Ecuación general de la parábola

En temas anteriores se definió una circunferencia en términos de un conjunto de puntos. El análisis demostró que la ecuación de la circunferencia era de segundo grado, o cuadráticas, en dos variables. La ecuación cuadrática general en $x$ y $y$ se puede expresar de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

La gráfica de una ecuación de segundo grado en las coordenadas $x$ y $y$ se llama sección cónica, o simplemente cónica. Tal denominación tiene su origen en el hecho de que la curva se puede obtener como la intersección de un cono circular recto y un plano.

A continuación, se describirá la forma de obtener la ecuación general de la parábola. Si desarrollamos y transponemos términos en la ecuación ordinaria de la parábola, obtenemos lo siguiente:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$$

La última expresión puede escribirse como sigue:

$$y^2 + a_1 x + a^2 y + a3 = 0, \text{ con } a_1 \neq 0$$

donde $a_1 = -4p$, $a_2 = -2k$ y $a_3 = k^2 + 4ph$. Recíprocamente, al completar el cuadrado para la variable $y$ se puede demostrar que una ecuación de la forma anterior representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje $x$. Lo anterior sería como sigue:

El matemático griego Apolonio (262 a.C. - 200 a.C.) escribió el tratado definitivo, *Secciones cónicas*, sobre este tema. Superó los trabajos de los geómetras griegos anteriores y su obra constituyó la piedra angular del pensamiento acerca del tema por más de mil años: pasaron dieciocho siglos antes de que Descartes escribiera su libro *La Géométrie*.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$$
$$x^2 - 4py - 2hx + h^2 + 4py = 0$$

Reescribiendo la última ecuación, tenemos:

$$x^2 + a'_1 y + a'_2 x + a'_3 = 0 \text{ con } a'_1 \neq 0$$

donde $a'_1 = -4p$, $a'_2 = 2h$ y $a'_3 = h^2 + 4py$.

En el caso en el que $a_1$ o $a'_1$ sean iguales a cero, la expresión tendría la siguiente forma:

$$y^2 + a_2 + a_3 = 0, \text{ ó } \; x^2 + a'_2 + a'_3 = 0$$

Las ecuaciones anteriores son cuadráticas con una única variable. Si las raíces son reales y desiguales, nombrémoslas $r_1$ y $r_2$, así que la ecuación con la variable $y$ cuadrática tendría la siguiente forma:

$$(y - r_1)(y - r_2) = 0$$

El lugar geométrico correspondiente consta de dos rectas diferentes, $y = r_1$ y $y = r_2$, ambas paralelas al eje $x$. Si las raíces de la ecuación son reales e iguales, el lugar geométrico consta de dos rectas coincidentes representadas geométricamente por una sola recta paralela al eje $x$. Finalmente, si las raíces de la ecuación son complejas, no existe ningún lugar geométrico. Un análisis similar aplica para la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

**TEOREMA 2.6:** Una ecuación de segundo grado en las variables $x$ y $y$ que carezca del término en $xy$ puede escribirse en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje $x$. Si, en cambio, $D = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje $x$, dos rectas coincidentes paralelas al eje $x$, o ningún lugar geométrico, según que las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas, respectivamente.

Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje $y$. Si, en cambio, $E = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje $y$, dos rectas coincidentes paralelas al eje $y$ o ningún lugar geométrico, según que las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas, respectivamente.

**Ejemplo 1:**

Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola; además, encontrar:

- Las coordenadas del vértice y del foco.
- La ecuación de su directriz.
- La longitud de su lado recto.

La ecuación dada:

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$$

representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje $y$, según lo establecido en el **teorema 2.6**. Si reducimos la ecuación anterior a la segunda forma ordinaria a través de completar el cuadrado en $x$, obtenemos lo siguiente:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3)$$

De esta ecuación deducimos que las coordenadas del vértice son:

$$V = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

Como $4p = 6$, $p = \frac{3}{2}$ y la parábola abre hacia arriba. Entonces, como el foco está sobre el eje de la parábola y éste es paralelo al eje $y$, las coordenadas del foco son:

$$F = \left(\frac{5}{2}, 3 + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

La ecuación de la directriz, por su parte, es:

$$y = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Finalmente, la longitud del lado recto es: $|4p| = 6$.

TIC

Ve los videos "Obtener los elementos de la parábola dada su ecuación general (utilizando fórmulas) - PARTE 1" y "Elementos de la parábola, dada su ecuación (PARTE 2)" para reafirmar tus conocimientos sobre la ecuación de la parábola.

http://www.youtube.com/watch?v=SycUaqxfn0I&feature=fvsr

http://www.youtube.com/watch?v=oug3IabUtxY&feature=relmfu

**Ejemplo 2:**
Dibujar la gráfica de la siguiente ecuación:

$$y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$$

La ecuación dada representa una parábola debido a que $y$ aparece elevada al cuadrado mientras que $x$ aparece en forma lineal. Es útil reducir la ecuación a la forma ordinaria para facilitar el trazado de la gráfica. Así, al completar el cuadrado se obtiene:

$$y^2 - 6y + 9 = -8x - 25 + 9$$
$$(y - 3)^2 = -8\,(x + 2)$$

El vértice se ubica en $(-2, 3)$. Como $4p = -8$ y $p = -2$, el foco está 2 unidades a la izquierda del vértice. La longitud del lado recto es, entonces, igual a $|4p| = 8$, y el lado recto se extiende 4 unidades por arriba y por abajo del foco.

## Actividad de desarrollo

Solidaridad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

TIC

ATRIBUTO

- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

**1.** En pareja, resuelvan los siguientes ejercicios en su cuaderno:

1) Realicen la gráfica del ejemplo anterior.

2) Calculen el foco de la parábola que tiene por ecuación $y^2 = 5x$.

3) Hallen la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (8,0). Dibujen la parábola resultante.

4) Encuentren la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (0,8). Dibujen la parábola resultante.

5) Calculen las coordenadas del vértice y el foco, así como la ecuación de la directriz, de la parábola $y^2 = 16x$. Dibujen la parábola resultante.

**2.** Revisen sus resultados de manera grupal con su profesor y corrijan los errores, en caso de que existan.

# Obtención de las ecuaciones de la parábola

## Valoración de condiciones y datos

En este apartado recapitularemos las condiciones que se pueden presentar para cada una de las formas de la ecuación de la parábola.

Comenzaremos con la ecuación ordinaria de la parábola:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Esta ecuación describe una parábola con vértice $V(h, k)$, esto es, fuera del origen. La primera condición que encontramos es que $k = h = 0$, lo que significa que el vértice está en el origen y tendríamos la ecuación canónica o reducida de la parábola:

$$y^2 = 4px$$

Esta forma es la más sencilla debido a que el vértice de la parábola se encuentra en el origen del sistema de coordenadas. Para caracterizar la parábola representada por esta ecuación, algunos de los datos que se pueden proporcionar son:

- El valor de $p$.
- Las coordenadas de uno de los puntos de la parábola.

Si sucediera el primer caso, bastaría con sustituir el valor de $p$ en la ecuación para descubrir la ecuación de la parábola. En el segundo caso, el objetivo sería encontrar el valor de $p$ según la coordenada dada. Una vez descubierto el valor de $p$ se procedería como en el primer caso para descubrir la ecuación de la parábola.

**Ejemplo:**

La ecuación $y = x^2$ es la ecuación de una parábola, debido a que:

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y$$

$$x^2 = 1y = y$$

Aun cuando el valor de $p$ no se proporciona de manera explícita, éste puede intuirse poniendo atención a la ecuación. El resultado se ilustra en la **figura 2.19.**

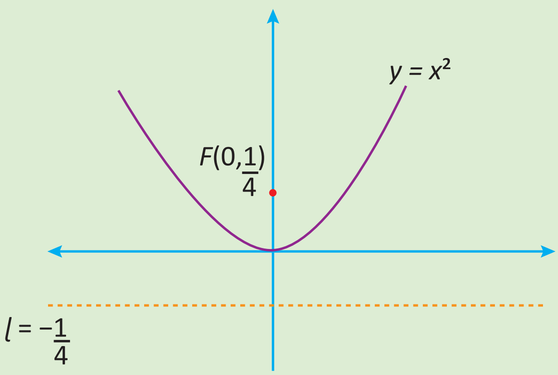



Figura 2.19. Ejemplo de la ecuación canónica de la parábola.

Para complementar el análisis de la forma canónica tenemos que considerar que toda ecuación de este tipo puede convertirse a la forma ordinaria. Esto se logra trasladando el origen a la posición actual del vértice, lo que da como resultado la expresión:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

donde $k$ y $h$ son las coordenadas del vértice $V(h, k)$.

Finalmente, la ecuación general de la parábola tiene algunos puntos a considerar. Primero recordemos esta ecuación:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

De ella se deben considerar los siguientes puntos:

- Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$ la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje $x$.
- Si $D = 0$, la ecuación puede representar varias situaciones, según las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$:
  - Dos rectas diferentes paralelas al eje $x$, si las raíces son reales y desiguales.
  - Dos rectas coincidentes paralelas al eje $x$, si las raíces son reales e iguales.
  - Ningún lugar geométrico, si las raíces son complejas.
- Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje $y$.
- Si $E = 0$, la ecuación representa varias situaciones, según las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$:
  - Dos rectas diferentes paralelas al eje $y$, si las raíces son reales y desiguales.
  - Dos rectas coincidentes paralelas al eje $y$, si las raíces son reales e iguales.
  - Ningún lugar geométrico, si las raíces son complejas.

NO ABANDONO

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber".

Albert Einstein

## Actividad de desarrollo

Respeto

VALORES

TIC

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

ATRIBUTO

- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

**1.** En pareja, resuelvan los siguientes ejercicios:

1) Hallar los elementos principales (foco, vértice y directriz) de las siguientes parábolas:

**a)** $y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$

**b)** $y^2 - 6x + 14 + 29 = 0$

2) Hallar la ecuación, en su forma ordinaria, de la parábola $y^2 + 8x - 6y - 15 = 0$ .

**2.** Revisen sus resultados de manera grupal con su profesor, y corrijan los errores en caso de que existan.

# Ecuación de la parábola dados tres puntos

Una forma de deducir la ecuación de una parábola es a través de tres de sus puntos. Así, dados tres puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ que pertenecen a una parábola (horizontal o vertical), su ecuación se obtiene mediante las siguientes expresiones:

- Parábola horizontal: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.
- Parábola vertical: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$.

**Ejemplo:**

Determinar la ecuación general de la parábola cuyo eje es paralelo al eje $x$ y que pasa por los puntos $P_1(-1, 1)$, $P_2(-1, -1)$ y $P_3(-5, 0)$. (Como ejercicio adicional, graficar los puntos anteriores.)

Según el problema, el eje de la parábola es paralelo al eje $x$, por lo que la parábola es horizontal y la ecuación que se utiliza es:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al sustituir los puntos $P_1(-1, 1)$, $P_2(-1, -1)$ y $P_3(-5, 0)$ se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas:

Para el punto $P_1$:

$$(1)^2 + D(-1) + E(1) + F = 0$$
$$-D + E + F = -1$$

Para el punto $P_2$:

$$(-1)^2 + D(-1) + E(-1) + F = 0$$
$$-D - E + F = -1$$

Para el punto $P_3$:

$$(0)^2 + D(-5) + E(0) + F = 0$$
$$-5D + F = 0$$

Al reunir las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-D + E + F = -1$$
$$-D - E + F = -1$$
$$-5D + 0E + F = 0$$

Al resolver este sistema se obtiene los siguientes resultados:

$$D = -\frac{1}{4}, \qquad E = 0, \qquad F = -\frac{5}{4}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y se simplifica:

$$y^2 - \frac{1}{4}x + 0y - \frac{5}{4} = 0$$
$$4y^2 - x - 5 = 0$$

Por tanto, la ecuación buscada de la parábola es: $4y^2 - x - 5 = 0$

**Ejemplo 2:**
Una parábola cuyo eje es paralelo al eje $y$ pasa por los puntos (1, 1), (2, 2) y (–1, 5). Encontrar su ecuación. (Como ejercicio adicional, graficar la parábola mediante los puntos dados.)

Dado que el eje de la parábola es paralelo al eje $y$, la ecuación debe ser cuadrática en $x$ y lineal en $y$. Por lo tanto, se comienza con la forma general:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Así, las coordenadas de cada uno de los puntos dados deben satisfacer esta ecuación. Al sustituir las coordenadas de cada punto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 + D + E + F = 0$$
$$4 + 2D + 2E + F = 0$$
$$1 - D + 5E + F = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$D = -2 \qquad E = -1 \qquad F = 2$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 - 2x - y + 2 = 0$$

## Actividad de desarrollo

Laboriosidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

ATRIBUTO

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

1. De manera individual, pon en práctica lo aprendido. Para ello, resuelve los siguientes ejercicios:
   1) La ecuación de una parábola es $(x - 2)^2 = 16y$, por lo que se trata de una parábola ____________ que abre hacia ____________ .
   2) La ecuación de una pa rábola es $y^2 = 20px$, así que las coordenadas de su foco $F$ son ____________.
   3) Observa la **figura 2.20** y encuentra la ecuación de la parábola.

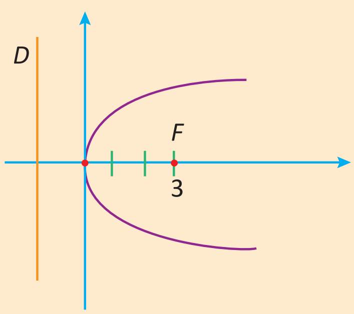



Figura 2.20

   4) Dada la parábola $y^2 = -24x$, calcula su vértice, su foco y su recta directriz. Dibuja la parábola resultante en tu cuaderno.
2. Revisa tus respuestas con tu profesor.

# Solución de problemas cotidianos empleando la parábola

## Familias de parábolas

Las familias de parábolas se dividen según la ecuación y la posición que ocupen en el plano. Por tanto, se tienen las siguientes opciones para las familias de parábolas:

- Familia de parábolas verticales: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
- Familia de parábolas horizontales: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.
- Familia de parábolas verticales con centro en el origen: $x^2 = 4py$.
- Familia de parábolas horizontales con centro en el origen: $y^2 = 4py$.

Debe advertirse que las dos últimas familias cumplen con la condición de que el vértice se encuentra en el origen del sistema coordenado. Todas las familias pueden formarse a partir de las siguientes condiciones:

- Mismo vértice.
- Mismo parámetro y punto.
- Mismo parámetro y ordenada de vértice.

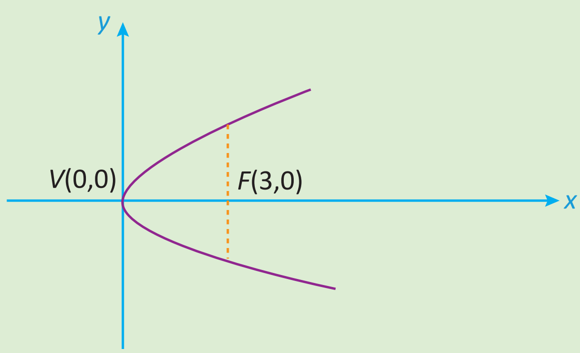



Figura 2.21. Parábola con vértice en el origen y foco en el punto (3,0).

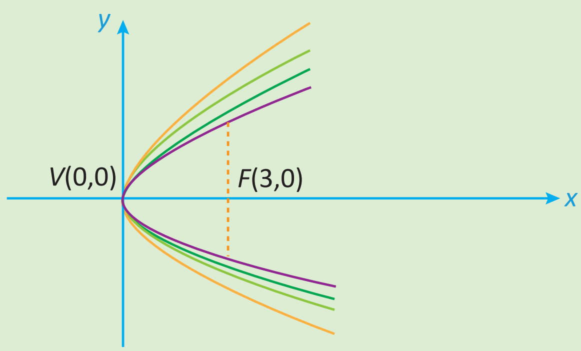



Figura 2.22. Familia de parábolas horizontales con vértice en el origen.

**Ejemplo:**
Determinar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (3, 0).

La **figura 2.21** muestra la gráfica de la parábola con los puntos dados. A partir de la gráfica se deduce que la parábola es cóncava hacia la derecha y el valor del parámetro es $p = 3$, por lo que al sustituir estos valores en la ecuación $y^2 = 4px$ se obtiene:

$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(3)x$$
$$y^2 = 12x$$
$$y^2 = 12x$$

El resultado anterior es la ecuación de una sola parábola, pero podemos encontrar la familia de parábolas correspondiente a la ecuación hallada. Lo anterior se consigue si dejamos que el valor de $p$ adquiera cualquier valor real mayor a cero. De esta manera, la ecuación quedaría como:

$$y^2 = 4px$$

**La figura 2.22** muestra algunos de los ejemplos de las gráficas que se obtienen utilizando la ecuación anterior.

## Problemas de aplicación

La parábola tiene muchas propiedades interesantes que la hacen adecuada para ciertas aplicaciones. Con frecuencia, se requieren superficies reflectoras y el diseño de éstas mediante parábolas resulta muy útil. Esas superficies, llamadas **paraboloides**, son tridimensionales y se forman haciendo girar una parábola en torno a su eje. Los rayos luminosos procedentes de un objeto lejano, como una galaxia, son esencialmente paralelos, por lo tanto cuando entran a un telescopio reflector, se reflejan en un espejo parabólico hacia el foco, donde por lo regular hay una cámara para capturar la imagen durante algún tiempo. Una antena parabólica doméstica funciona con el mismo principio que el del telescopio reflector: la señal digital de un satélite de televisión se capta en el foco del plato parabólico y se decodifica mediante un receptor.

También las parábolas son importantes en el diseño de puentes colgantes. Se puede demostrar que si el peso del puente está distribuido de manera uniforme sobre toda su longitud un cable de soporte con forma de parábola puede sostener la carga. Por otro lado, la trayectoria de un proyectil lanzado oblicuamente, que puede ser un balón de basquetbol arrojado desde la línea de tiro libre, describirá un arco parabólico. De la misma manera, se ha observado que los atunes, cuyas presas son peces más pequeños, nadan en cardúmenes de 10 a 20 individuos ordenados aproximadamente en forma parabólica. Una explicación posible de este hecho es que los peces más pequeños atrapados por el cardumen de atunes tratarán de escapar "reflejándose" fuera de la parábola: el resultado final es que se concentran en el foco y son presa fácil de los atunes.

TIC

Pon a prueba estos conocimientos a través de un programa de graficado en línea. Ingresa al siguiente link en donde encontrarás una útil herramienta para graficar familias de parábolas o incluso una sola curva.

http://conicas.weigandt.net/home/graficador

**Ejemplo 1:**

El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 m y su profundidad es de 25 cm. ¿A qué altura debe colocarse el receptor?

La reflexión es una de las principales propiedades de la parábola. Cuando una onda emana del foco y choca con la parábola se produce una reflexión paralela al eje, así que, al chocar con la parábola, el rayo se refleja y cruza por el foco. Luego, si se gira una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie de revolución llamada paraboloide, la cual es precisamente la forma que tienen las antenas parabólicas.

Antena parabólica.

Si se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, con un diámetro (de la antena) de 1.5 m y con fondo de 25 cm, entonces la parábola, por ser simétrica, pasa por los puntos (–0.75, 0.25) y (0.75, 0.25); al sustituir uno de estos puntos en la ecuación canónica de la parábola tenemos:

$$x^2 = 4py$$
$$(-0.75)2 = 4p(0.25)$$
$$p = 0.562$$

En consecuencia, las coordenadas del foco están dadas por $F(0, 0.562)$, así que el receptor debe colocarse a 56.2 cm del vértice.

**Ejemplo 2:**

Las dos torres de un puente colgante, como se muestra en la **figura 2.23**, tienen una separación de 240 m y una altura de 110 m; si el puntal más corto mide 10 m, determinar la altura de un puntal que se encuentra a 100 m del centro.

Para dar solución a este problema, primero se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical. Si las torres están separadas por 240 m y su altura con respecto al vértice de la parábola es de 100 m (110 m – 10 m), entonces la parábola pasa por los puntos $P_1(-120, 100)$ y $P_2(120, 100)$.

Se sustituye ahora el punto $P_2$ en la ecuación canónica de la parábola:

$$x^2 = 4py$$
$$(120)^2 = 4p(100)$$
$$p = 36$$

Por tanto, la ecuación buscada es:

$$x^2 = 4(36)y$$
$$x^2 = 144y$$

NO ABANDONO

"Es una locura odiar a todas las rosas sólo porque una te pinchó... Renunciar a todos tus sueños sólo porque uno de ellos no se cumplió".

Antoine de Saint-Exupéry

Para encontrar la ordenada cuya abscisa es $x = 100$, se sustituye este valor para $x$ en la ecuación anterior:

$$100^2 = 144y$$

$$y = 69.44$$

El puntal que se encuentra a 100 m del centro mide entonces:

$$69.44 \text{ m} + 10 \text{ m} = 79.44 \text{ m}$$

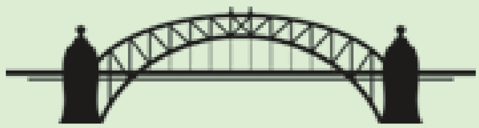


Figura 2.23. Puente colgante.

## Actividad de cierre

Responsabilidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

TIC

ATRIBUTO

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

**1.** De manera individual, pon en práctica lo que has aprendido. Para ello, resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

- El arco del triunfo de París, tiene una longitud de 45 m, considerando la parte más alta como (0, 0) y ubicando su foco a 5 m por debajo de él, entonces:
  1) ¿Cuáles serían las coordenadas de su foco? ______________________
  2) ¿Cuál es la ecuación de la parábola que define el arco? ______________

**2.** Realiza la siguiente práctica.

- En una hoja milimétrica dibuja una parábola siguiendo las instrucciones:
  1) Dibuja una tabla con dos columnas nombradas como $X$ y $Y$.
  2) Llena la columna de $X$ con valores aleatorios, considerando lo siguiente.
     - Determina el rango de salto entre cada número, por ejemplo puede ser de uno en uno. El rango de salto debe ser el mismo para todos los números.
     - Intenta no utilizar números muy grandes para que las operaciones no resulten muy complicadas.
  3) Los valores de la columna $Y$ los obtendrás calculando la ecuación de la parábola: $y = ax^2 + b$.
  4) Por último, dibuja la parábola utilizando los datos de las columnas $X$ y $Y$.

**3.** Entrega tus resultados al profesor.

**Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 2.2" y prepárate para realizar tu actividad de evaluación.**

1. Completa el esquema escribiendo la definición de cada concepto.

**Elementos de la parábola**

- **Foco:** ______________________________
- **Directriz:** ______________________________
- **Eje de parábola:** ______________________________
- **Vértice:** ______________________________
- **Cuerda:** ______________________________
- **Cuerda focal:** ______________________________
- **Lado recto:** ______________________________

**Realiza tu evaluación parcial.**

1. De acuerdo con la figura, indica el nombre del elemento de la parábola.

$F$: ______________________

$V$: ______________________

$P$: ______________________

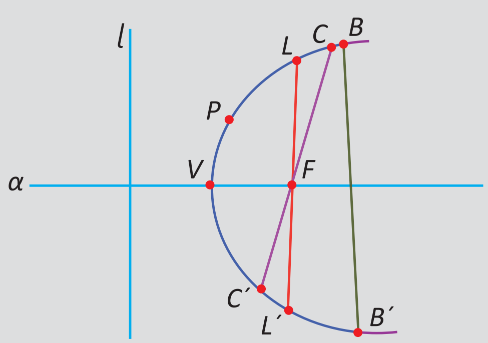
$C$ y $C'$: ______________________

$L$ y $L'$: ______________________

$B$ y $B'$: ______________________

$\alpha$: ______________________

$l$: ______________________




**Valor: 4 puntos**

# Actividad de evaluación 2.2.1

Reflexión

VALORES

EVALUACIÓN

RÚBRICA

TIC

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. |

**1.** De manera individual, representa gráficamente la parábola, a partir del análisis de su ecuación y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno, para ello haz lo siguiente;

**2.** Graficación de parábolas con centro en el origen.

1) Calcula las coordenadas del foco, directriz, longitud del lado recto de cada una de las parábolas con vértice en el origen.

**a)** $V(0, 0)$, directriz $y = \frac{5}{2}$

**b)** $V(0, 0)$, lado recto 7 unidades y abre hacia la izquierda.

**c)** $V(0, 0)$, foco en $(4, 0)$.

**d)** $V(0, 0)$, pasa por el punto $P(3, -2)$.

**e)** $V(0, 0)$, foco en $(4, 0)$.

**f)** $V(0, 0)$, directriz $x = -5$.

2) Grafica cada solución de los problemas anteriores.

3) Analiza la mecánica que seguiste para resolver cada uno de los incisos del problema anterior. De acuerdo a tu razonamiento, plantea el procedimiento que seguiste para llegar a la solución.

4) Con el análisis anterior, desarrolla una presentación con los puntos más importantes.

**3.** Graficación de parábolas con centro fuera del origen

1) Calcula las coordenadas del foco, directriz, longitud del lado recto y realiza la gráfica de cada una de las parábolas con vértice fuera del origen de la serie de 5 problemas:

**a)** Halla la ecuación de la parábola con vértice en $(2, 3)$, eje paralelo al eje de las coordenadas y que pasa por el punto $(4, 5)$.

**b)** Halla el vértice, lado recto, foco ecuación de la directriz y traza la parábola cuya ecuación es: $x^2 - 4x - 4y - 4 = 0$.

**c)** Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en $(2, -3)$, eje paralelo al eje $x$, y pasando a través del punto $(3, 1)$.

**d)** Determina la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje $y$ y que pasa por los tres puntos $L(-2, 9)$, $M(0, 1)$ y $N(3, 4)$.

**e)** Encuentra las ecuaciones de la parábola vertical que pasa por los puntos: $(1, 0)$, $(-3, 28)$, $(2, 3)$.

2) Grafica cada una de las parábolas de los problemas anteriores.

3) Analiza la mecánica que seguiste para resolver cada uno de los incisos del problema anterior. De acuerdo a tu razonamiento, plantea el procedimiento que seguiste para llegar a la solución.

4) Con el análisis anterior, desarrolla una presentación con los puntos más importantes.

4. Aplicaciones cotidianas de la parábola

1) Resuelve los siguientes problemas aplicando los fundamentos de la parábola en aplicaciones de diseño de espejos para telescopios, sistemas de alumbrado, puentes, faros de auto y antenas receptoras de televisión, empleando los modelos matemáticos estudiados:

**a)** Una antena parabólica tiene un diámetro de un metro. Si tiene una profundidad de 20 cm., ¿a qué altura debemos colocar el receptor?, es decir, ¿a qué distancia está el foco del vértice?

**b)** Un puente tiene una longitud de 160 metros. El cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal en cada uno de los extremos tiene una altura de 25 metros, ¿cuál es la ecuación de la parábola?

**c)** En un puente colgante, la distancia entre sus torres es de 300 metros y la altura de las torres es de 100 metros. Describe la ecuación del cable que soporta el puente.

**d)** Un diseñador de automóviles desea construir un faro que tenga 16 centímetros de diámetro. La bombilla que va a utilizar en él tiene el filamento de 2 centímetros del cuello. ¿Qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro si el cuello de la bombilla se coloca a la altura del vértice del faro?

**e)** La antena de un radiotelescopio en forma de paraboloide tiene un diámetro de 8 metros. Si la profundidad de la antena es de 0.5 metros, ¿a qué distancia del vértice debe colocarse el receptor?

2) Desarrolla un problema, con su respectiva solución, de la vida cotidiana que esté relacionado con los conceptos de parábola.

5. Pasa en limpio el trabajo realizado de los puntos 2 al 8 de esta actividad, no olvides incluir su respectivo título. Incluye los procedimientos y métodos aplicados, junto con los resultados que obtuviste paso por paso. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha, número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.

6. Antes de entregar tus resultados a tu profesor, realiza la Rúbrica 2.2.1, de tu “Autoevaluación” que se encuentra al final de esta unidad en la sección “Instrumentos de evaluación”. Revisa si cumples con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de presentarlo.

7. Para finalizar, compara tus respuestas con un compañero y corrige, de ser necesario.

NO ABANDONO

“La juventud es el momento de estudiar la sabiduría; la vejez, el de practicarla”.
Jean Jacques Rousseau


# 2.3 Representa gráficamente la elipse, mediante su ecuación o elementos que la integran

El último tema de esta unidad lo comprende la elipse. Abordaremos las principales características de la elipse, así como sus fórmulas representativas, dada su importancia tanto en matemáticas como en otras ciencias.

## Representación gráfica de la elipse

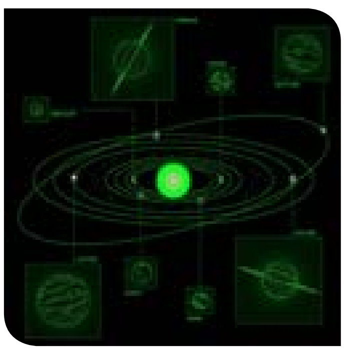
A pesar de la sencillez de su definición, las cónicas han resultado de gran aplicación tanto en las matemáticas como en el resto de las ciencias. Un ejemplo de ello lo encontramos en las elipses, pues se ha demostrado que las órbitas de los planetas alrededor del Sol siguen esa trayectoria y que, más aún, la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica. Fue el astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) quien descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses, con el Sol como uno de sus focos.

### La elipse como lugar geométrico

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos de la elipse se llaman **focos**. La definición de una elipse excluye el caso en el que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

CURIOSIDADES

El nombre de elipse se atribuye a Apolonio de Pérgamo, a quien también se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos, que intentó explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna.



Los anillos de Júpiter y las orbitas de los planetas son elípticas.

## Actividad de inicio

Curiosidad

VALORES

TIC

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. |
| ATRIBUTO | • Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez. |

1. De manera individual, investiga en libros, enciclopedias o internet sobre el tema de la elipse.
2. Observa la **figura 2.24** y, de acuerdo a tu investigación, determina cuáles son los focos y dónde se encuentra el centro de la elipse.

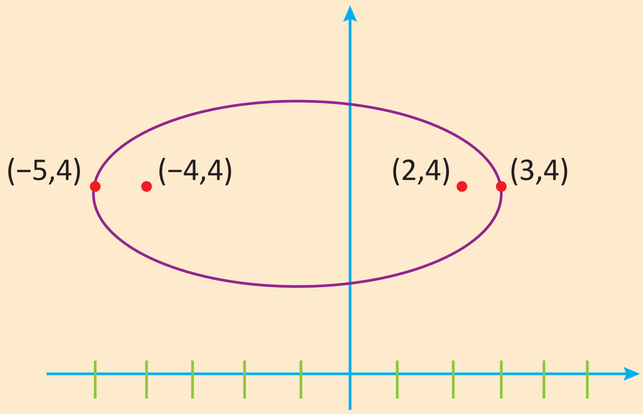



Figura 2.24.

3. Comparte tus resultados con el grupo.

# Elementos de la elipse

La **figura 2.25** ilustra cada uno de los elementos que forman parte de una elipse.

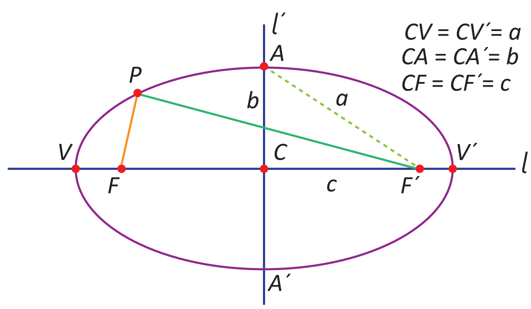



Figura 2.25 Partes de la elipse.

## Radio vectores

Si $P$ es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ que unen los focos con el punto $P$ se llaman **radios vectores** de $P$.

## Eje focal

La recta $l$ que pasa por los focos es conocida, generalmente, como **eje focal**.

## Eje secundario

La recta $l'$ que pasa por $C$ y es perpendicular al eje focal $l$ se le conoce, generalmente, como **eje secundario**.

## Centro

El punto $C$ del eje focal se llama **centro**, y se localiza en el punto de intersección del eje focal con el eje secundario.

## Distancia focal

Sean $F$ y $F'$ los **focos** de una elipse. El segmento $\overline{FF'}$ que los une se conoce como **distancia focal**.

## Vértices

El eje focal corta a la elipse en dos puntos, $V$ y $V'$, mismos que son llamados **vértices**.

## Eje mayor

La porción del eje focal comprendida entre los dos vértices, esto es, el segmento $\overline{VV'}$, se llama **eje mayor**.

## Eje menor

El eje secundario $l'$ corta a la elipse en dos puntos, $A$ y $A'$, y el segmento $\overline{AA'}$ se denomina **eje menor**.

## Excentricidad

La **excentricidad** es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse, y es igual al cociente de la mitad de la distancia focal dividida entre la mitad del eje mayor. Como $CV = CV' = a$, entonces $VV' = 2a$ y, de igual forma, $CF = CF' = c$, por lo que $FF' = 2c$. De esta manera, la excentricidad queda definida como $e = \frac{c}{a}$.

# Actividad de desarrollo

Creatividad

VALORES

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean. |
| ATRIBUTO | • Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez. |

**1.** En pareja, hagan su propio péndulo de Foucault; para ello deberán seguir las siguientes instrucciones:

- Reúnan el siguiente material:
  - Un hilo (resistente).
  - Una botella de plástico.
  - Pintura líquida.
  - Un pliego de papel bond.
- Cuelguen el hilo de una parte alta, mientras en el otro extremo coloquen la botella rellena con pintura de modo que la boca quede situada hacia abajo. Antes de llenar la botella realicen un pequeño agujero en el tapón. Coloquen, debajo de la botella, el pliego de papel; procuren que la distancia entre el papel y el tapón sea la menor posible, pero sin que se toquen. Muevan la botella de su punto de reposo, suéltenla y observen los trazos del péndulo. Realicen pruebas de impulso, de modo que la trayectoria no rebase el papel.

**2.** Comenten las observaciones del experimento y escriban una conclusión de un párrafo.

**3.** Compartan su conclusión con el resto del grupo.

CURIOSIDADES

El péndulo de Foucault (llamado así en honor de su inventor, León Foucault) se inventó para comprobar el movimiento de la Tierra, y su primera exposición en público fue en el año de 1851.

# Tipos de elipse

Los diferentes tipos de elipses se clasifican según su posición con respecto al plano cartesiano. En esta sección se presentará un resumen de sus elementos y algunas ecuaciones características.

## Vertical con centro en el origen y fuera del origen

**Con centro en el origen**

La característica principal de este tipo de elipse es que el eje mayor coincide con el eje $y$. La **figura 2.26** ilustra esta elipse.

**Ecuación canónica:**

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

**Elementos**:
Vértices: $V(0, \pm a)$
Focos: $F(0, \pm c)$
Extremos del eje menor: $A(\pm b, 0)$
Lado recto: $LL' = \frac{2b^2}{a}$
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} (e < 1)$
Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde
$b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

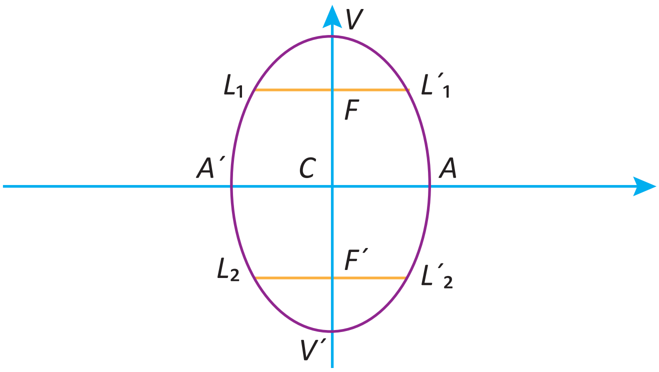


Figura 2.26. Elipse vertical con centro en el origen.

**Con centro fuera del origen**
Para encontrar la ecuación de una elipse vertical con centro fuera del origen basta con realizar una traslación desde el origen hasta el nuevo centro $C(h, k)$ mediante las ecuaciones de transformación $x' = x - h$ y $y' = y - k$. El resultado que se obtiene es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

**Elementos:**
Vértices: $V(h, k \pm a)$
Focos: $F(h, k \pm c)$
Extremos del eje menor: $A(h \pm b, k)$

**Ejemplo:**
Determina los elementos y grafica la elipse, cuya ecuación es: $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.
El primer paso consiste en transformar la ecuación a su forma ordinaria:

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

Ambas partes de la igualdad se dividen entre el término independiente:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

El resultado se simplifica y se obtiene la forma canónica:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Entonces: $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, que de acuerdo con la definición $a > b$, de donde, $a = 3$ y $b = 2$ entonces, dados estos resultados se observa que la elipse es de tipo vertical. La ecuación de este tipo de elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para encontrar $c$, se sustituye $a^2$ y $b^2$ en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

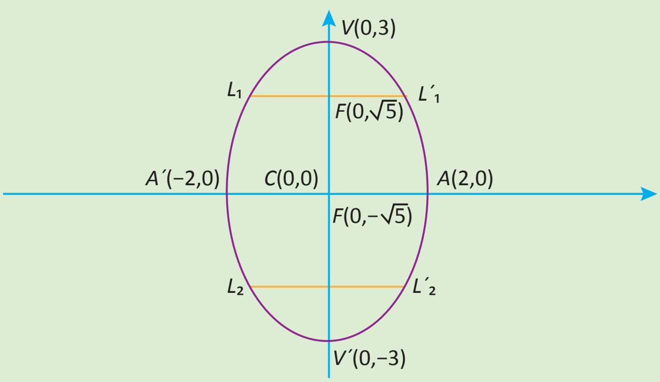


Figura 2.27 Ejemplo de elipse vertical.

Los elementos de la elipse se obtienen al sustituir los valores de $a$, $b$ y $c$ en:

Vértices:

$V(0, a)$, $V'(0, -a)$ → $V(0, 3)$, $V'(0, -3)$

Focos

$F(0, c)$, $F'(0, -c)$ → $F(0, \sqrt{5})$, $F'(0, -\sqrt{5})$

Extremos del eje menor:

$A(b, 0)$, $A'(-b, 0)$ → $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$

$LL' = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3}$ → Longitud del lado recto

$VV' = 2a = 2(3) = 6$ → Longitud del eje mayor

$FF' = 2c = 2\sqrt{5}$ → Longitud del eje formal

$AA' = 2b = 2(2) = 4$ → Longitud del eje menor

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ → Excentricidad

La **figura 2.27** ilustra el resultado de este ejemplo.

El ejercicio anterior muestra algunas operaciones utilizando la forma canónica de la elipse. Aún cuando este tema no ha sido abordado, se puede comenzar a tener una idea de su aplicación.

## Horizontal con centro en el origen y fuera del origen

**Elipse horizontal con centro en el origen**

La característica principal de este tipo de elipse es que el eje mayor coincide con el eje *x*. La **figura 2.28** se presenta este tipo de elipse.

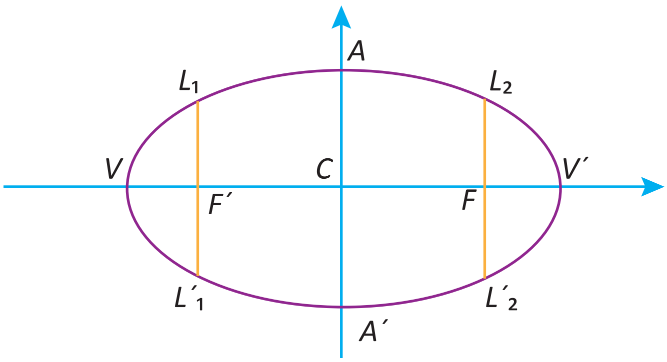



Figura 2.28 Elipse horizontal.

**Ecuación canónica**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

**Elementos**:

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje menor: $A(0, \pm b)$

Lado recto: $LL' = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}\ (e<1)$

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

**Elipse horizontal con centro fuera del origen**

Para una elipse horizontal con centro fuera del origen en el punto $(h, k)$, se hace una traslación de los ejes coordenados al punto $C(h, k)$. La **figura 2.29** ilustra este tipo de elipses.

Para fortalecer tus conocimientos ingresa en la siguiente página donde encontrarás un test para resolver.

TIC

https://www.goconqr.com/p/2625513-test-matemarico-quizzes

**Elementos:**

$C$ → Centro

$V$ y $V'$ → Vértices

$F$ y $F'$ → Focos

$A$ y $A'$ → Extremos del eje menor

$VV' = 2a$ (eje mayor)

$FF' = 2c$ (eje focal)

$AA' = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}\ (e<1)$

$$LL' = \frac{2b^2}{a} \rightarrow \text{Lado recto}$$

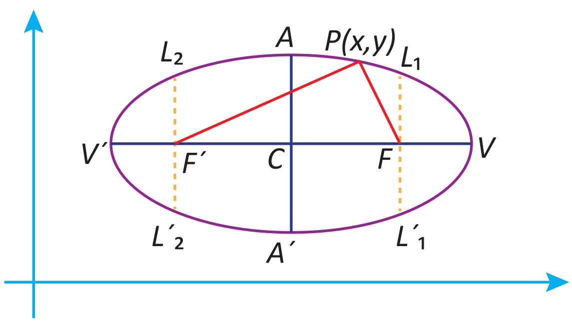



Figura 2.29 Elipse con centro fuera del origen.

Como se puede observar en la **figura 2.29**, los elementos de la elipse no cambian aun cuando el centro no se encuentre en el origen.

Sean $x' = x - h$ y $y' = y - k$, la ecuación de la elipse en el nuevo sistema coordenado es:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Se sustituyen $x'$, $y'$ en la ecuación y se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{v^2}=1$$

A continuación se presenta la ecuación de la elipse con centro fuera del origen.

**Ecuación**:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

**Elementos**:

Vértices: $V(h \pm a, k)$
Focos: $F(h \pm c, k)$
Extremos del eje menor: $A(h, k \pm b)$

**Ejemplo:**

Determine los elementos de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$.
Reescribiendo la ecuación tenemos:
$9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y = -144$
Después se agrupan los términos en $xy$
$(9x^2 - 72x) + (4y^2 - 24y) = -144$
Factorizando la ecuación anteriores, obtenemos lo siguiente:
$9(x^2 - 8x) + 4(y^2 - 6y) = -144$
Se completan los trinomios cuadrados perfectos:

$$9\left(x^2-8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2\right)+4\left(y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2\right)=-144+9\left(\frac{8}{2}\right)^2+4\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$9(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 - 6y + 9) = -144 + 144 + 36$$

Factorizando y simplificando se obtiene lo siguiente:

$$9(x-4)^2 + 4(y-3)^2 = 36$$

Si dividimos ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$\frac{9(x-4)^2}{36}+\frac{4(y-3)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

Es una elipse vertical con centro $C(4, 3)$, $a = 3$, $b = 2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Estos datos se sustituyen para obtener los elementos y trazar la gráfica.

# Representación matemática de la elipse

## Ecuación ordinaria de la elipse

La ecuación ordinaria contempla el tipo de elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje $x$. Enunciaremos la ecuación ordinaria de la elipse a través del siguiente teorema.

**TEOREMA 2.7:** La ecuación de una elipse con centro en el origen, eje focal coincidente con el eje $x$ y distancia focal igual a $2c$ es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje $y$, en forma tal que las coordenadas de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Para cada elipse, $a$ es la longitud del semieje mayor, $b$ la del semieje menor y $a$, $b$ y $c$ están relacionados mediante:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Asimismo, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad $e$ está dada por:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$$

**Ejemplo:**

Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje $y$. Si uno de los focos es el punto $(0, 3)$ y la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$, encontrar las coordenadas del

**CURIOSIDADES**

La definición de la elipse se usa para la explicación de una ley acústica. Las ondas sonoras que, partiendo de uno de los focos, recorren los caminos que cumplen la propiedad que caracteriza a una elipse son totalmente perceptibles en el otro foco. Es decir, las ondas sonoras reflejadas en un foco se concentran en el otro.

otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

Dado que uno de los focos es el punto (0, 3), $c = 3$ y las coordenadas del otro foco son (0,-3). A su vez, como la excentricidad es $\frac{1}{2}$:

$$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} = \frac{1}{a}$$

De la expresión anterior se deduce que $a = 6$, por lo que:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

Por tanto, las longitudes de los ejes mayor y menor son $2a = 12$ y $2b = 6\sqrt{3}$, respectivamente.

Por el **teorema 2.7**, la ecuación de la elipse que corresponde con las características descritas es:

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$$

La longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{54}{6} = 9$

En el siguiente teorema el centro de la elipse se encuentra fuera del origen y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados.

TIC

En la siguiente liga encontrarás otros ejemplos de ecuaciones de elipses

http://www.educa-play.com/es/recursoseducativos/968126/ecuaciones_de_la_elipse_.htm

**TEOREMA 2.8:** La ecuación de la elipse con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $x$ está dada por la segunda forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Por otro lado, si el eje focal es paralelo al eje $y$ entonces su ecuación estará dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, $a$ es la longitud del semieje mayor, $b$ es la longitud del semieje menor, $c$ es la distancia del centro a cada foco y $a$, $b$ y $c$ están ligadas por la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Asimismo, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad $e$ está dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

**Ejemplo:**

Los vértices de una elipse tienen por coordenadas (–3, 7) y (–3, –1), en tanto la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Ya que los vértices $V$ y $V'$ están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas –3, se deduce que el eje focal es paralelo al eje $y$. Por tanto, por el **teorema 2.8** la ecuación de la elipse tiene la siguiente forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

El centro es el punto medio del eje mayor VV', por tanto sus coordenadas son (-3,3). La longitud del eje mayor VV' es 8. De esta manera, $2a = 8$ y $a = 4$. La longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 2$. Dado que $a = 4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b = 2$ y la longitud del eje menor es 4. Por lo anterior, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Como $a$, $b$ y $c$ están relacionados, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Así, las coordenadas de los focos son $F\left(-3, 3+2\sqrt{3}\right)$ y $F'\left(-3, 3-2\sqrt{3}\right)$. Por su parte, la excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

CURIOSIDADES

La ecuación de la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen. Lo anterior se deduce de su ecuación canónica.

## Actividad de desarrollo

Reflexión

VALORES

TIC

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida. |

**1.** En pareja, obtengan la ecuación ordinaria de las siguientes elipses:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 2 = 0$

2) $9x^2 + 4y^2 - 28x - 27 = 0$

3) $x^2 + 4y^2 + 16y - 20 = 0$

**2.** Entreguen sus resultados a su profesor.

# Ecuación general de la elipse

NO ABANDONO

"La juventud es el momento de estudiar la sabiduría; la vejez, el de practicarla".
Jean Jacques Rousseau

Consideremos ahora la ecuación de la elipse en la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Al quitar los denominadores tenemos:

$$a^2b^2\left(\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}\right)=a^2b^2(1)$$

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

Ahora, si desarrollamos los cuadrados, obtenemos lo siguiente:

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 = a^2b^2$$

Al ordenar los términos se llega a:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Esta ecuación podría escribirse de la siguiente forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde:

$$A = b^2$$
$$C = a^2$$
$$D = -2b^2h$$
$$E = -2a^2k$$
$$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$$

De lo anterior, resulta evidente que $A$ y $C$ deben tener el mismo signo. La ecuación anterior es conocida como la *ecuación general de la elipse*.

De manera recíproca, la ecuación anterior puede transformarse a la forma ordinaria al completar los cuadrados, es decir:

$$\left(\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{c}\right)+\left(\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}\right)=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$$

Sea $M \dfrac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$. Si $M \neq 0$, esta ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{MC}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{MA}=1$$

la cual se identifica como la ecuación ordinaria de la elipse.

NO ABANDONO

"No aprendemos para la escuela, sino para la vida".
Séneca

Como $A$ y $C$ deben concordar en signo, se puede suponer que ambos son positivos. Por lo tanto, si la ecuación general representa una elipse entonces el último análisis demuestra que $M$ debe ser positivo. De igual modo, el denominador $4A^2C^2$ de $M$ es positivo, por lo que el signo de $M$ depende del signo de su numerador $CD^2 + AE^2 - 4ACF$, al que se designará como $N$. De esta forma, si $N > 0$ la ecuación representa una elipse. Si $N = 0$, la ecuación representa un sólo punto:

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

usualmente conocido como elipse punto, y si $N < 0$ la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

**TEOREMA 2.10:** Si los coeficientes $A$ y $C$ son del mismo signo, la ecuación:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, un punto, o bien ningún lugar geométrico.

**Ejemplo:**
La ecuación de una elipse es $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular además las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

Para dar solución a este problema primero se reduce la ecuación dada a la forma ordinaria, completando los cuadrados. De este proceso se obtiene lo siguiente:

$$(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$

$$(x^2+2x+1)+4\left(y^2-3y+\frac{3}{4}\right)=-6+1+9$$

Esta ecuación se puede factorizar como:

$$(x+1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4$$

La forma ordinaria queda entonces expresada de la siguiente manera:

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{1}=1$$

Las coordenadas del centro $C$ son, evidentemente, $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$, así que el eje focal es paralelo al eje $x$. Como $a^2 = 4$, $a = 2$ y las coordenadas de los vértices $V$ y $V'$ son $\left(-1+2,\frac{3}{2}\right)$ y $\left(-1-2,\frac{3}{2}\right)$, esto es, $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ y $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$, respectivamente. La longitud del eje mayor es $2a = 4$, la del eje menor es $2b = 2$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 1}{2}=1$. Por su parte, la excentricidad es: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

# Obtención de ecuaciones de la elipse
## Valoración de condiciones y datos

Para obtener la ecuación de una elipse es importante conocer como mínimo dos datos. El primero de ellos es el centro de la elipse, y puede conducirnos a dos casos: (1) centro de la elipse en el origen del plano cartesiano, esto es, $C(0, 0)$, y (2) centro de la elipse fuera del origen del plano cartesiano, esto es, $C(h, k)$. El otro dato es la longitud del centro de la elipse a uno de sus dos ejes, bien el eje mayor o bien el eje menor. A partir de esta información, es sencillo deducir la ecuación de la elipse. Por ejemplo, una elipse con centro en el origen y longitud del eje mayor igual a 4 y del eje menor igual a 2 lleva a la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Otro elemento importante a identificar es el eje focal. El eje focal se encuentra situado justo en la misma posición que el eje mayor. Según lo expuesto, es relativamente sencillo encontrar el eje focal, debido a que sólo se necesita determinar la posición del eje mayor. Una vez determinado este eje, el siguiente paso consiste en descubrir la distancia del foco al centro de la elipse. Para esta tarea se hace uso de un triángulo rectángulo, como muestra la **figura 2.30.**

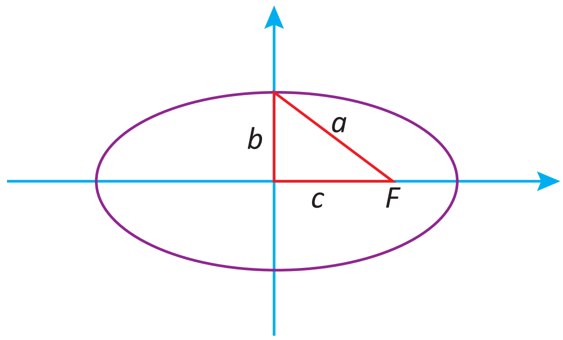


Figura 2.30. Uso de la relación de un triángulo rectángulo para descubrir la longitud del eje focal.

En la **figura 2.30** se forma un triángulo rectángulo con los lados $a$, $b$ y $c$, los cuales corresponden a la longitud del eje mayor, menor y focal, respectivamente. Una propiedad importante es que la hipotenusa del triángulo rectángulo corresponde a la longitud del eje mayor. Entonces se puede hacer uso del teorema de Pitágoras para descubrir la longitud del eje focal:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

# Ecuación de la elipse dados cuatro puntos

Como ocurrió con la parábola, para encontrar la solución de este problema, el procedimiento consiste en sustituir los puntos dados, cuatro en este caso, en la ecuación general. De esta manera, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuya solución determina los coeficientes de la ecuación general de la elipse.

Como ya hemos visto anteriormente en esta unidad, la ecuación general de la elipse es la siguiente:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta ecuación constituye el punto de partida para encontrar la ecuación de una elipse si se conocen cuatro puntos que pertenecen a ella. Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento a seguir.

**Ejemplo 1:**
Determinar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (0, –1), (2, 0), (4, –1) y (2, –2).

Como se dan cuatro puntos, el primer paso es localizarlos en el plano coordenado, como muestra la **figura 2.31**.

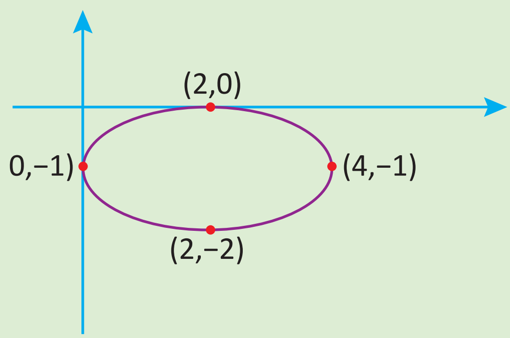


Figura 2.31. Cuatro puntos que pertenecen a una elipse.

Ahora, se sustituyen las coordenadas de cada punto en la ecuación general de la elipse tomando $A = 1$; es decir, se sustituye en $x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Punto: (0, –1)

$$0^2 + (-1)^2C + (0)D + (-1)E + F = 0 \rightarrow C - E + F = 0$$

Punto: (2, 0).

$$()^2 + (0)^2C + (2)D + (0)E + F = 0 \rightarrow 2D + F = -4$$

Punto: (4, 1)

$$(4)^2 + (-1)^2C + (-1)E + F = 0 \rightarrow C + 4D - E + F = -16$$

Punto: (2, –2)

$$(2)^2 + (-2)^2C + (2)D + (2)E + F = 0 \rightarrow 4C + 2D - 2E + F = -4$$

Al reunir las ecuaciones anteriores, se obtiene un sistema con cuatro incógnitas cuyo resultado es:

$$C = 4,\ D = -4,\ E = 8,\ F = 4$$

Estos resultados se sustituyen en la ecuación general de la elipse:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

lo que da como resultado final:

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

**Ejemplo 2:**
Determinar la ecuación de la elipse que pasa por los siguientes puntos: (0,3), (2, 0),

$$\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$$

El procedimiento es similar al del ejemplo 1. Se sustituyen los puntos en la ecuación general de la elipse, tomando $A = 1$.

Punto (0, 3):

$$(0)^2 + (3)^2 C + (0)D + (3)E + F = 0 \rightarrow 9C + 3E + F = 0$$

Punto (2, 0):

$$(2)^2 + (0)^2 C + (2)D + (0)E + F = 0 \rightarrow 2D + F = -4$$

Punto $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$(1)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 C + (1)D + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)E + F = 0 \quad \rightarrow \quad 27C + 4D + 6\sqrt{3}E + 4F0 - 4$$

Punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{15}\right)^2 C + \left(\frac{1}{2}\right)D + \left(\frac{3}{4}\sqrt{15}\right)E + F = 0 \quad \rightarrow \quad 135C + 8D + 12\sqrt{15}E + 16F = -4$$

Con las ecuaciones anteriores se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos resultados son:

$$C = \frac{4}{9},\ D = 0,\ E = 0,\ F = -4$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{4}{9}y^2 - 4 = 0$$

Por tanto, la ecuación buscada de la elipse es:

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

## Actividad de desarrollo

Colaboración

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

ATRIBUTO

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

**1.** En pareja, encuentren el centro, los focos y los vértices del siguiente conjunto de elipses, y represéntenlas gráficamente en su cuaderno.

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

2) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

3) $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

**2.** Reúnanse en grupo y vuelvan resolver los problemas con ayuda de su profesor.

# Solución de problemas cotidianos, empleando la elipse

La elipse es una parte esencial de la vida cotidiana, desde las órbitas de los planetas, que son elípticas con el Sol en uno de los focos, hasta aparatos médicos como el litotriptor para desintegrar "cálculos" renales por medio de ondas intra-acuáticas de choque, cuyo funcionamiento implica un medio elipsoide lleno de agua pegado al cuerpo del paciente en el foco en el que se pone un generador de ondas; el foco de la otra parte del elipsoide se debe localizar en estos "cálculos" y así, al reflejarse las ondas en la superficie de la elipsoide externa del paciente, todas convergerán en el "cálculo" y éste se desintegrará.

En la vida diaria existen muchos usos para la elipse; por ejemplo, los lentes o los globos, los altavoces de tres vías, las trayectorias que realizan los aviones, etcétera. Un campo en el que la elipse ha sido especialmente importante ha sido el de la arquitectura, en muchas ciudades es fácil encontrar plazas de planta elíptica, normalmente conocidas por el nombre de "plaza elíptica". Por ejemplo, en Madrid y Bilbao existen plazas de este tipo. Sin embargo, la plaza de planta elíptica más famosa en el mundo probablemente sea la Plaza de San Pedro en el Vaticano.

En esta parte de la unidad se analizarán las familias de elipses así como algunos problemas de aplicación. Como se mencionó, la teoría es la base para el entendimiento de un tema; sin embargo, los ejemplos al final de esta sección, ponen en el escenario práctico la teoría de las secciones anteriores.

TIC

Ve el video "Las leyes de Kepler" Para conocer más acerca del uso de la elipse en la física.

https://www.youtube.com/watch?v=Y3hlfKnVR3A

## Familia de elipses

En temas anteriores se abordó la ecuación de la elipse según la posición de su centro (en el origen o fuera del mismo), así como respecto de su orientación (horizontal o vertical). Al recordar la ecuación de la elipse horizontal, tenemos que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Esta ecuación representa cualquier elipse con centro en el origen o fuera de éste. Ahora bien, para una elipse vertical la ecuación correspondiente es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Esta ecuación representa cualquier elipse vertical con centro en el origen o fuera de éste. Cabe resaltar que estas ecuaciones representan cualquier elipse en cualquiera de los cuadrantes del plano cartesiano o coordenado.

Una elipse está determinada por los siguientes cuatro parámetros: *h, k, b, a*. Estos parámetros están presentes en ambas ecuaciones ordinarias. Cuando no se conoce alguno de estos parámetros se genera una familia de elipses.

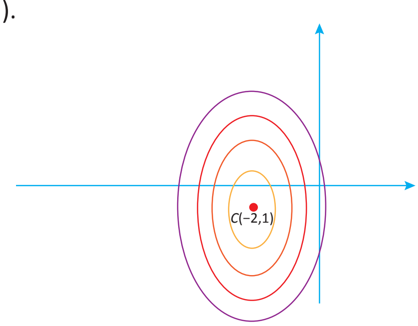



Figura 2.32. Familia de elipses con centro en (–2, 1).

**Ejemplo:**

Calcular la familia de elipses verticales con centro en (–2, 1).

Dado que se conoce desde el principio la orientación de la elipse, la elección sobre qué ecuación ordinaria elegir es sencilla:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Además se tiene el valor del centro, por lo que se sustituye en la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{b^2}+\frac{(y-1)^2}{a^2}=1$$

Esta ecuación representa la familia de elipses verticales con centro en (–2, 1) y parámetros *a* y *b*. La **figura 2.32** es una ilustración de lo anterior.

## Actividad de desarrollo

Independencia

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

ATRIBUTO

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

**1.** De forma individual, resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno:

1) Hallar la ecuación de la elipse que tiene como focos $F(-5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ así como una magnitud del eje mayor de 12.

2) Graficar la elipse $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$

3) Graficar la elipse $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{36}=1$

**2.** Entrega tus resultados a tu profesor.

# Problemas de aplicación

La elipse tiene propiedades reflectoras similares a las de la parábola. Se puede demostrar que, si una fuente luminosa o sonora se coloca en el foco de una elipse, todos sus rayos u ondas se reflejarán en la superficie de la cónica y llegarán al otro foco. La **figura 2.33** ilustra la propiedad reflectora de una elipse.

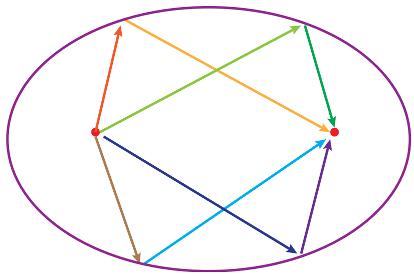


Figura 2.33. Propiedad reflectora de una elipse.

Un ejemplo de esta propiedad reflectora se puede apreciar si se construye una mesa de billar con forma de una elipse y se ubica una buchaca en un foco, cualquier tiro que se origine en el otro foco nunca fallará para entrar en ella. Ahora bien, si un techo tiene forma elíptica y sus dos focos están cerca del piso, cualquier susurro en un foco se oirá en el otro. Existen algunas "galerías de susurros" como el Vestíbulo de las estatuas del Capitolio en Washington D.C., el Tabernáculo Mormón en Salt Lake City, la Catedral de San Pedro en Londres y el Convento Carmelita del Desierto de los Leones en la Ciudad de México.

Otra aplicación de las elipses la tenemos en la demostración que hizo Isaac Newton, mediante las Leyes de la Gravitación Universal, de la primera Ley de Kepler del movimiento planetario. Esta ley establece que la órbita de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con éste en uno de sus focos.

**Ejemplo 1:**
Una de las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario dice que "los planetas se mueven en órbitas elípticas, donde el Sol se ubica precisamente en uno de sus focos". Determinar la longitud del semieje menor de la órbita de Mercurio si su excentricidad es de 0.206 y su semieje mayor mide 0.387 unidades astronómicas (UA).

Dado que el semieje mayor es 0.387 y la excentricidad corresponde a $e=\frac{c}{a}=0.206$, se concluye que:

$$\frac{c}{0.387}=0.206 \quad \rightarrow \quad c=0.079722$$

Al sustituir en $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(0.387)^2-(0.079722)^2}$ se encuentra que el semieje menor mide 0.387 UA.

## Actividad de desarrollo

Dedicación

VALORES

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. |

TIC

1. De manera individual, determina las coordenadas de los focos de las siguientes elipses y grafica la elipse resultante en tu cuaderno:

   1) $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{36}=1$ 2) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$ 3) $\frac{y^2}{225}+\frac{x^2}{100}=1$

2. Entrega tus resultados al profesor.

**Ejemplo 2:**
La Tercera Ley de Kepler dice que "el cuadrado del periodo *p* de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". Determina el periodo de Saturno si su distancia media al Sol es de 9.539 UA

Según lo establecido en el problema, tenemos que:

$$p^2=a^3 \quad \rightarrow \quad p=\sqrt{a^3} \quad \rightarrow \quad p=\sqrt{(9.539)^3}=29.46 \text{ años}$$

Entonces, el periodo de Saturno corresponde a 29.46 años.

# Actividad de cierre

Laboriosidad

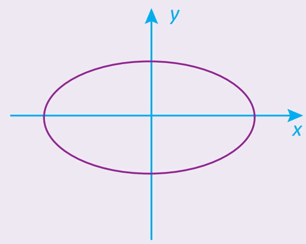
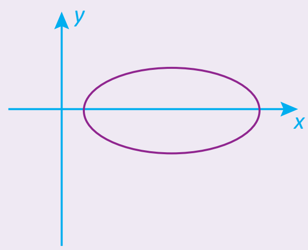
VALORES

TIC

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. |

**1.** De forma individual, resuelve los siguientes ejercicios para poner en práctica lo que has aprendido.

- Completa la siguiente tabla.

| Ecuaciones | Características | Gráfica |
|---|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>Donde $a > b$ | |  <br>Figura 2.33 |
| $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$<br>Donde $a > b$ | Representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro en el origen, eje focal que coincide con el eje $y$. | |
| | Representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro fuera del origen $(h, k)$, eje focal que coincide con el eje $x$. |  <br>Figura 2.34 |
| | Representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro fuera del origen $(h, k)$, eje focal que coincide con el eje $y$. | |

- Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices se encuentran en los puntos (0, –6) y (0, 6), y que además tiene una excentricidad de $\frac{2}{3}$.
- Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son (–5, 0) y (5,0), con uno de sus focos en (3, 0).

**2.** Entrega tus resultados al profesor.

## Recapitulación

Preevaluación

**Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 2.3" y prepárate para realizar tu actividad de evaluación.**

1. Une con una línea cada concepto de la columna derecha con la información de la columna izquierda.

La circunferencia.

La parábola.

El lugar geométrico.

Ecuación canónica de la parábola horizontal.

Forma general de la ecuación de la circunferencia.

Ecuación general de la parábola.

Forma ordinaria de la circunferencia.

Es el valor del radio de un círculo nulo o círculo punto.

Es la ecuación de la familia de parábolas horizontales con centro en el origen.

Forma canónica de la elipse vertical.

Ecuación general de la elipse.

La elipse.

Es la figura formada por los puntos del plano que cumplen con una condición.

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$y^2 = 4px$

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano es siempre igual a una constante.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado centro.

$r = 0$

$y^2 = 4px$

**Realiza tu evaluación parcial.**

1. Completa las siguientes tablas y añada el nombre del lugar geométrico correspondiente:

| Tipo | Ecuación | Foco | Directriz |
|---|---|---|---|
| Vertical | $x^2 = 4py$ | $F(0, p)$ | $D = y = -p$ |
| Horizontal | $y^2 = 4px$ | $F(p, 0)$ | $D = x = -p$ |
| Vertical | $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ | $F(0, p)$ | |
| Horizontal | $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ | $F(p, 0)$ | |

______________________________

| Tipo | Ecuación | Foco | Vértices | Extremos del eje menor | Excentricidad | Lado recto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Vertical | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $F(\pm c, 0)$ | $V(\pm a, 0)$ | $A(0, \pm b)$ | $e = \frac{c}{a}\ (e < 1)$ | $LL' = \frac{2b^2}{a}$ |
| Horizontal | | $F(0, \pm c)$ | | $A(\pm b, 0)$ | | $LL' = \frac{2b^2}{a}$ |
| Vertical | | $F(h, k \pm c)$ | | $A(h \pm b, k)$ | | |
| Horizontal | $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ | | $V(h \pm a, k)$ | | $e = \frac{c}{a}\ (e < 1)$ | |

______________________________

| Tipo | Ecuación | Foco | Directriz | Ecuación del eje | Lado Recto |
|---|---|---|---|---|---|
| Vertical | | $F(0, p)$ | | $x = 0$ | |
| Horizontal | $y^2 = 4px$ | $F(p, 0)$ | $x = -p$ | $y = 0$ | $LL' = \lvert 4p \rvert$ |
| Vertical | | | | | |
| Horizontal | $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ | | $x = h - p$ | | $LL' = \lvert 4p \rvert$ |

______________________________

Valor: 3 puntos

## Actividad de evaluación 2.2.3

Curiosidad

VALORES

EVALUACIÓN

RÚBRICA

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
| ATRIBUTO | • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. |

TIC

**1.** De manera individual, representa gráficamente la elipse, a partir del análisis de su ecuación y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno, para ello haz lo siguiente:

**2.** Construcción geométrica de la elipse.

- Realiza la construcción geométrica de la elipse, empelando los métodos del jardinero y el escantillón, que a continuación se describen.

  1) Método del jardinero:

  **a)** Traza un plano cartesiano.

  **b)** Identifica el eje $x$ (abscisas) y el eje $y$ (ordenadas).

  **c)** En el eje de las ordenadas se marcan dos puntos cualesquiera (considerándose la misma distancia para los positivos (+) y negativos (–)).

  **d)** Se necesitará un hilo o cordón mayor a 10 cm, éste estará sujeto al lápiz en uno de sus extremos y el otro extremo estará apoyado en uno de los puntos asignados en el eje y (se recomienda que primero se tracen los positivos y después los negativos).

  **e)** Traza el arco del eje de las abscisas positivas al eje de las ordenadas positivas y de aquí al eje de las abscisas negativas.

  **f)** De la misma manera traza para el lado opuesto, obteniendo el lugar geométrico de la elipse.

  2) Método del escantillón:

  **a)** Traza un plano cartesiano considerando que el eje de las abscisas ($x$) será el eje mayor ($A$, $B$), mientras que el eje de las ordenadas ($y$) será el eje menor ($C$, $D$). El punto de intersección de ambas será el centro ($O$).

  **b)** Corta una tira de papel de 20 cm de largo por 4 cm de ancho.

  **c)** Marca en la tira de papel el eje mayor y el eje menor, partiendo del centro. Coloca el número 3 en el eje menor, el 2 para el eje mayor y el 1 se marcará colocando el 2 en el centro del eje menor al punto $C$.

  **d)** Para trazar la elipse se coloca la tira de papel de tal forma que el punto 2 coincida con el eje de las abscisas positivas y el punto 3 coincida con el eje de las ordenadas negativas.

  **e)** Marca en el punto 1 la distancia obtenida, gira la tira de papel del centro $C$ al punto $B$.

  **f)** Repite el mismo procedimiento para los puntos $C$ a $A$.

  **g)** Invierte la tira de papel para los puntos $A$, $D$ y $D$, $B$.

- Tras completar los ejercicios anteriores, desarrolla una presentación donde expongas los pasos que seguiste para resolver cada caso. Tal presentación deberá estar acompañada de material gráfico para una mejor comprensión.

3. Graficación de la elipse con centro en el origen

1) Para cada inciso, encuentra la ecuación de la parábola con los datos que se proporcionan:

   a) Vértice en el origen y foco en el punto (–5,0).

   b) Vértice en el origen y foco en el punto (0,7).

   c) Vértice en el origen y directriz en la recta $y + 2 = 0$.

   d) Vértice en el origen y directriz en la recta $2x - 3 = 0$.

   e) Foco en el punto F($\frac{5}{3}$, 0) y directriz en la recta $3x + 4 = 0$.

2) Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de cada una de las siguientes parábolas:

   a) $x^2 = 12y$

   b) $y^2 = -4x$

   c) $24y = 8x^2$

   d) $x^2 = 16y$

   e) $x = -y2$

   f) $3x^2 + 8y = 0$

3) Obtén la ecuación de la elipse acuerdo a los siguientes elementos: eje focal, distancia focal, coordenadas de los vértices, eje mayor, eje menor y excentricidad descritos por tu profesor.

4) Plantea dos ejemplos, con sus respectivas soluciones, donde apliques las ecuaciones de la elipse con centro en el origen. Los ejemplos pueden ser ficticios o reales.

4. Graficación de la elipse con centro fuera del origen

1) Determina la ecuación ordinaria de la elipse con $C\,(3,2)$, eje mayor paralelo al eje $x$, $2a = 4$ y $2b = 3$.

2) Determina la ecuación ordinaria de la elipse con $A(6, 0)$, $A'(-6, 0)$, $2b = 10$.

3) Hallar la ecuación de la elipse con los siguientes datos: $A(0, 8)$, $A'(0, -8)$, $F(0, 6)$.

4) Encuentra la ecuación de la familia de elipses cuyo eje no focal es la recta cuya ecuación es $x = 8$, eje mayor igual a 6 y eje menor igual a 2.

5) Encuentra la familia de elipses cuyos vértices son: $V(-2, 6)$, $V'(-2, -4)$

6) Encuentra la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los siguientes puntos: $P(5, 2)$, $Q(4, 5)$, $R(-2, 5)$, $S(-2, -1)$

7) Dadas las ecuaciones de las parábolas, determina sus elementos: vértice, foco, directriz, eje mayor, eje menor y lado recto.

   a) $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$

   b) $x^2 - 24y + 48 = 0$

   c) $4x^2 - 4x - 16y - 23 = 0$

   d) $4y^2 - 5x + 5 = 0$

8) Obtén la ecuación de la elipse acuerdo a los siguientes elementos: Eje focal, distancia focal, coordenadas de los vértices, eje mayor, eje menor y excentricidad descritos por tu profesor.

9) Plantea dos ejemplos, con sus respectivas soluciones, donde apliques las ecuaciones de la elipse con centro fuera del origen. Los ejemplos pueden ser ficticios o reales.

5. Pasa en limpio el trabajo realizado de los puntos 2 al 8 de esta actividad, no olvides incluir su respectivo título. incluye los procedimientos y métodos aplicados, junto con los resultados que obtuviste paso por paso. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha, número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.

6. Antes de entregar tus resultados a tu profesor, realiza la Rúbrica 2.3.1, de tu "Autoevaluación" que se encuentra al final de esta unidad en la sección "Instrumentos de evaluación". Revisa si cumples con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de presentarlo.

7. Finalmente, entrega los resultados a tu profesor.

EVALUACIÓN **PLANEA**

**Contesta los reactivos que se presentan a continuación, rellenando completamente el óvalo de la respuesta correcta.**

1. Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A$(2-2), $B$(-1,4) y $C$(4,6).

   (a) $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$

   (b) $3x^2 + 3y^2 - 16x - 25y - 17 = 0$

   (c) $6x^2 + 6y^2 - 2x - 5y - 4 = 0$

   (d) $3x^2 + 3y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$

2. Para la circunferencia, cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$. Determinar el centro y el radio.

   (a) $C(0,0)$ y $r = 6$

   (b) $C(-4,3)$ y $r = 3$

   (c) $C(3,-4)$ y $r = 6$

   (d) $C(0,0)$ y $r = 9$

3. Encuentra las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia, cuya ecuación es: $9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$.

   (a) Centro = (0,0), radio = $\frac{1}{3}$

   (b) Centro = $(-1, \frac{2}{3})$, radio = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

   (c) Centro = $(1, \frac{2}{3})$, radio = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

   (d) Centro = $(-1, \frac{1}{3})$, radio = 1

4. Obtén la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz en la recta $x - 3 = 0$.

   (a) $y^2 = 4px$

   (b) $y^2 = -12x$

   (c) $y^2 + 12x = 0$

   (d) $x^2 = 4px$

5. Determina la ecuación general de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (-4,3) y (-1,3), respectivamente.

   (a) $y^2 = 4px$

   (b) $y^2 - 6y + 9 - 12x - 48 = 0$

   (c) $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$

   (d) $x^2 - 6x + 9 - 12y - 48 = 0$

6. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$, determina cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a su ecuación.

a) $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$

b) $x^2 - x + y = 0$

c) $x^2 - 8x + 8y - 24 = 0$

d) $x^2 + 8x + 8y + 24 = 0$

7. Determina las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación es: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

a) $F(\frac{5}{6}, 0)$ $F'(-\frac{5}{6}, 0)$

b) $F(0, \frac{5}{6})$ $F'(0, -\frac{5}{6})$

c) $F(0, \frac{\sqrt{5}}{6})$ $F'(0, -\frac{\sqrt{5}}{6})$

d) $F(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0)$ $F'(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0)$

8. Determina la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, la longitud de su eje menor es 8.

a) $25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$

b) $25(x - 3)2 + 16(y - 5) = 400$

c) $25y^2 + 16x^2 - 160x - 150y + 225 = 0$

d) $y^2 + x^2 - 160y - 150x + 225 = 0$

9. Determina la ecuación de la elipse que pasa por los siguientes puntos: $(0, -1)$, $(2, 0)$, $(4, -1)$ y $(2, -2)$.

a) $x^2 + 4y - 4x + 8y + 4 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

d) $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

10. Determina la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen, vértice $(0, 5)$ y foco en $(0, 4)$.

a) $9x^2 + 25y^2 = 1$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

c) $x^2 + y^2 = 1$

d) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

## Autoevaluación

Evalúa los indicadores de aprendizaje de cada actividad de evaluación parcial para conocer la calificación que estás en posibilidad de obtener en la rúbrica según tu desempeño. Marca una √ en cada indicador logrado.
Para obtener Suficiente, deberás cubrir todos los indicadores del tono más claro, y para lograr Excelente, todos los indicadores de ambos tonos.

Suficiente    Excelente

| Rúbrica 2.1.1 | | |
|---|---|---|
| **Módulo:** Representación gráfica de funciones. | **Grupo:** | |
| **Nombre del alumno:** | **Fecha:** | |
| **Resultado de aprendizaje (R.A.):** 2.1 Representa gráficamente la circunferencia mediante su ecuación o elementos que la integran. | **Actividad de evaluación:** 2.1.1 Representa gráficamente la circunferencia, a partir del análisis de su ecuación y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno. | |
| **Porcentaje** | ✓ | **Indicador logrado** |
| **Gráfica de la circunferencia con centro en el origen** **30%** | | Calculé la ecuación de las circunferencias con centro en el origen, solicitadas por el docente y realicé su representación gráfica, considerando los procedimientos descritos. |
| | | Planteé y resolví un problema de la vida cotidiana, en donde se apliquen estas ecuaciones. |
| **Gráfica de la circunferencia con centro fuera del origen** **30%** | | Calculé la ecuación con centro fuera del origen solicitadas por el docente y realicé su representación gráfica sin errores. |
| | | Describí por escrito el desarrollo del procedimiento efectuado y planteé un problema de la vida cotidiana en donde se aplica la ecuación con centro fuera del origen. |
| **Grafica de la circunferencia dados tres puntos** **40%** | | Calculé sin errores la ecuación general de la circunferencia, mediante la construcción y solución de tres ecuaciones simultáneas con tres variables de primer grado. |
| | | Simplifiqué la ecuación general a ordinaria, localicé las coordenadas del centro y longitud del radio. |
| | | Elaboré la gráfica de la circunferencia en hojas milimétricas. |
| | | Grafiqué la ecuación de la circunferencia por medio de software matemático e imprimí la gráfica. |
| | **100** | |

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de "Suficiente", o si deseas mejorar para lograr el "Excelente", repasa los conceptos vistos en el RA 2.1 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Marca una √ en cada indicador logrado.

| Rúbrica 2.2.1 | | |
|---|---|---|
| **Módulo:**<br>Representación gráfica de funciones | **Grupo:** | |
| **Nombre del alumno:** | **Fecha:** | |
| **Resultado de aprendizaje:**<br>2.2 Representa gráficamente la parábola, mediante su ecuación o elementos que la integran. | **Actividad de evaluación:**<br>2.2.1 Representa gráficamente la parábola, a partir del análisis de su ecuación y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno. | |
| **Porcentaje** | ✓ | **Indicador logrado** |
| **Graficación de parábolas con centro en el origen 30%** | | Calculé las coordenadas del foco, directriz, longitud del lado recto y realicé la gráfica de la parábola con vértice en el origen, sin errores. |
| | | Realicé una presentación en diapositivas en donde describí el procedimiento efectuado. |
| **Graficación de parábolas con centro fuera del origen 30%** | | Calculé las coordenadas del foco, directriz, longitud del lado recto y realicé la gráfica de la parábola con vértice fuera del origen, sin errores. |
| | | Realicé una presentación en diapositivas en donde describí el procedimiento efectuado. |
| **Aplicaciones cotidianas de la parábola 40%** | | Resolví problemas aplicando los fundamentos de la parábola en aplicaciones de diseño de espejos para telescopios, sistemas de alumbrado, puentes, faros de auto y antenas receptoras de televisión, empleando los modelos matemáticos estudiados. |
| | | Planteé un problema que tuvo como contexto mi comunidad que pudo ser resuelto a partir de los fundamentos de la parábola. |
| | **100** | |

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de "Suficiente", o si deseas mejorar para lograr el "Excelente", repasa los conceptos vistos en el RA 2.2 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

| Rúbrica 2.3.1 | | |
|---|---|---|
| **Módulo:**<br>Representación gráfica de funciones | **Grupo:** | |
| **Nombre del alumno:** | **Fecha:** | |
| **Resultado de aprendizaje:**<br>2.3 Representa gráficamente la elipse, mediante su ecuación o elementos que la integran. | **Actividad de evaluación:**<br>2.3.1 Representa gráficamente la elipse, a partir del análisis de su ecuación y la determinación de sus elementos, para la solución de situaciones de su entorno. | |
| **Porcentaje** | ✓ | **Indicador logrado** |
| **Construcción geométrica de la elipse 30%** | | Realicé la construcción geométrica de la elipse empleando los métodos del jardinero y el escantillón, obteniendo un espacio geométrico uniforme sin errores. |
| | | Realicé una presentación en diapositivas en donde describí paso a paso el procedimiento realizado. |
| **Graficación de elipse con centro en el origen 30%** | | Obtuve la ecuación de la elipse acuerdo a los siguientes elementos: eje focal, distancia focal, coordenadas de los vértices, eje mayor, eje menor y excentricidad descritos por el docente. |
| | | Proporcioné dos ejemplos de cómo aplicar los procedimientos efectuados en un problema real o ficticio en mi comunidad. |
| **Graficación de elipse con centro fuera del origen 40%** | | Obtuve la ecuación de la elipse acuerdo a los siguientes elementos: eje focal, distancia focal, coordenadas de los vértices, eje mayor, eje menor y excentricidad descritos por el docente, |
| | | Proporcioné dos ejemplos de cómo aplicar los procedimientos efectuados en un problema real o ficticio en mi comunidad. |
| | **100** | |

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de "Suficiente", o si deseas mejorar para lograr el "Excelente", repasa los conceptos vistos en el RA 2.3 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

## Heteroevaluación

De acuerdo con el desempeño de sus alumnos, anote el peso logrado en cada actividad realizada. Sume los porcentajes para obtener el peso para la unidad.

**Tabla de ponderación**

| Unidad | RA | Actividad de evaluación | Aspectos a evaluar | | | % Peso específico | % Peso logrado | % Peso acumulado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | C | P | A | | | |
| 2. Representación gráfica y uso de curvas canónicas. | 2.1 Representa gráficamente la circunferencia, mediante su ecuación o elementos que la integran. | 2.1.1 | ▲ | ▲ | ▲ | 15 | | |
| | 2.2 Representa gráficamente la parábola, mediante su ecuación o elementos que la integran. | 2.2.1 | ▲ | ▲ | ▲ | 15 | | |
| | 2.3 Representa gráficamente la elipse, mediante su ecuación o elementos que la integran. | 2.3.1 | ▲ | ▲ | ▲ | 10 | | |
| **% peso para la unidad 2** | | | | | | **40** | | |
| **Peso total del módulo** | | | | | | **100** | | |

Al término de la última unidad, sume el peso logrado en todas las unidades y obtenga el total del módulo.

## Coevaluación

Trabaja con un compañero para que se evalúen mutuamente. Escribe los datos de tu compañero en la tabla siguiente.
Evalúa los atributos de las competencias genéricas que tu compañero puso en práctica durante esta unidad; para ello, en la tabla indica con una "**X**" la casilla que corresponda.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Nombre de mi compañero:** | | | | |
| **Carrera:** | | **Nombre del módulo:** | | |
| **Semestre:** | | **Grupo:** | | |
| **Competencias genéricas** | **Atributos** | **Con frecuencia** | **Algunas ocasiones** | **Nunca** |
| **Se autodermina y cuida de sí** | | | | |
| 1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. | Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida. | | | |
| | Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. | | | |
| **Se expresa y comunica** | | | | |
| 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. | Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. | | | |
| | Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas. | | | |
| **Piensa crítica y reflexivamente** | | | | |
| 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. | Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. | | | |
| | Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez. | | | |
| 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. | Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad. | | | |
| **Trabaja en forma colaborativa** | | | | |
| 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. | Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. | | | |
| | Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo. | | | |

# Cultura para la Paz

En esta sección, pondrás en práctica diversas estrategias para desarrollar algunas de las habilidades y actitudes éticas sobre valores de: comprensión, orden, justicia, reconocimiento del otro, cooperación, disciplina, equidad, límites democráticos y comunicación, y en particular, sobre la prevención de conflictos, con el fin de que aprendas a crear tu propio camino hacia la sana convivencia.

## Conciencia de mis acciones = control y armonía

"La conquista de sí mismo es la mayor de las victorias".

Platón, filósofo griego del siglo III

Constantemente estamos decidiendo, desde la ropa que nos ponemos hasta la carrera que elegimos. A excepción de algunas reacciones involuntarias (como estornudar o bostezar, etc.), todas nuestras acciones son una decisión, ¡inclusive nuestros estados de ánimo!

Para decidir, nuestro cerebro utiliza las experiencias y la información previa con la que cuenta, parte de esa información es consecuencia de experiencias directas y otra es resultado de lo que hemos escuchado o leído, es decir, información indirecta, referenciada.

Nuestro cerebro necesita respuestas rápidas y constantes, y en muchas ocasiones, utiliza las vías más cortas para ello, y toma la información que tiene a la mano. Parte de esta información (la indirecta) resulta ser un prejuicio, es decir, un juicio previo a una experiencia real y, por lo tanto, un juicio sin fundamento.

Amos Tversky y Daniel Kahneman llamaron a estos prejuicios "sesgos cognitivos", que son esquemas de pensamiento inconscientes y muy poderosos, que nos llevan a decisiones emocionales, intuitivas y sin razonamiento lógico.

En las relaciones personales tomamos decisiones que muchas veces están afectadas por los sesgos cognitivos. La buena noticia es que tú puedes hacerte consciente de ellos e identificarlos para erradicarlos. Comencemos por ubicarlos.

**Algunos de estos sesgos cognitivos son:**

- Tendencia a fijarme sólo en lo que me da la razón.
- Tendencia a creer que mi grupo (amigos, familia, grupo social, equipo) siempre tiene la razón.
- Tendencia a creer que los éxitos son por mi causa, y los fracasos, por causa de los demás.
- Tendencia a justificar mis decisiones a toda costa.
- Tendencia a evitar los cambios.
- Tendencia a fijarme más en lo negativo.
- Tendencia a creer lo que cree todo el mundo.
- Tendencia a esconderme o evadir los problemas.

En su obra, *El libro de las pequeñas revoluciones*, la psicóloga española Elsa Punset propone que una forma efectiva de reducir el efecto de los sesgos cognitivos es observar nuestra conducta diaria. El acto de "pescarnos" en alguna de estas actitudes nos ayuda a hacerlas conscientes y nos permite actuar y reflexionar: ¿por qué reacciono de este modo?, ¿cómo quiero actuar frente a esta situación? A continuación, trabajarás una dinámica en equipo para ejercitar esta técnica.

## Nuestro reflejo

1. En equipo de tres integrantes (de preferencia amigos o compañeros con quienes interactúen con más frecuencia), durante una semana observen su comportamiento entre sí, regístrenlo día a día en una tabla como el modelo siguiente.

| | Yo | Compañero 1 | Compañero 2 |
|---|---|---|---|
| Fijarme sólo en lo que me da la razón. | | | |
| Creer que mi grupo (amigos, familia, grupo social, partido) siempre tiene la razón. | | | |
| Creer que los éxitos son por mi causa y los fracasos, por causa de los demás. | **Ejemplo:** 12 de octubre. En clase culpé a los otros por la nota baja que obtuvimos en el trabajo en equipo. | | |
| Justificar mis decisiones a toda costa. | | | |
| Evitar los cambios. | | **Ejemplo:** 15 de octubre. Te sugerí que invitáramos a la compañera nueva a nuestra reunión de estudio y no estuviste de acuerdo porque "nunca hemos invitado a nadie". | |
| Fijarnos más en lo negativo. | | | |
| Creer lo que cree todo el mundo. | | | |
| Esconderse o evadir los problemas. | | | |

2. Describan brevemente la acción que observaron y anoten el día en que suceda, como en el ejemplo.
3. Realicen el ejercicio de forma constante, con respeto y objetividad (describan los hechos, sin enjuiciarlos). Eviten los adjetivos calificativos (feo, mal, etc.), y dejen a un lado su emotividad ("yo sentí que…", "se me hizo mala onda…").
4. Al final de la semana, reúnanse para compartir sus observaciones. Propicien un ambiente de confianza y respeto, con el objetivo de que la actividad sea de provecho para la mejora de cada integrante del equipo.
5. Observen cuáles actitudes se repiten en los reportes de los tres integrantes.
6. De forma individual, reflexiona sobre cada una de las actitudes que tuviste en la semana y la frecuencia con la que actúas de esa forma.
7. Comenten con el grupo: ¿cómo se realizó el trabajo en su equipo?, ¿cuántas coincidencias hubo entre lo que reportaron unos de otros?, ¿qué observaciones les fueron más significativas: las propias o las de sus compañeros?, ¿podrían establecer esta rutina de autobservación de forma permanente?, ¿qué ventajas encuentran en ello?

Recuerda que para estar bien con los otros, hay que comenzar con estar bien con uno mismo. Practica la reflexión como parte de tu rutina personal. Procura atender tus emociones para mantener un equilibrio personal que te permita establecer buenas relaciones con los demás y disfrutar esta etapa de tu vida.

¿Qué es una derivada?

¿Qué es un límite?

# Unidad 3

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE DERIVADAS

**22 horas**


*"Si consigo ver más lejos es porque he conseguido auparme a hombros de gigantes".*

Isaac Newton

NO ABANDONO


## Competencias genéricas

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
5. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

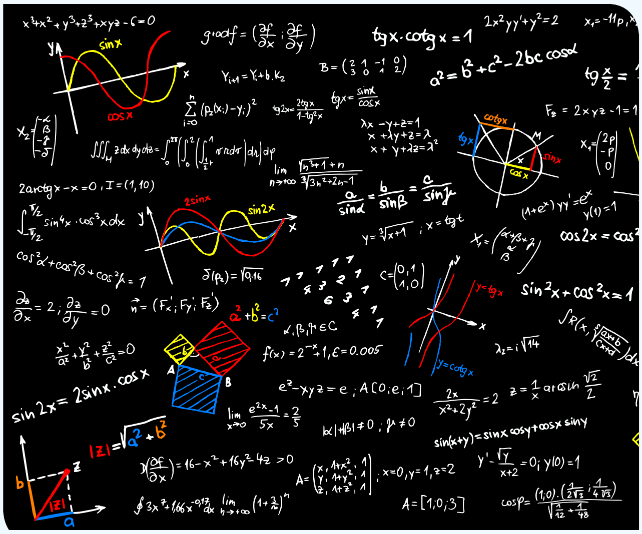
## Competencias disciplinares básicas de matemáticas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

# Un poco de historia y el nacimiento del cálculo

## Introducción

El cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. Una vez construido, la historia de la matemática ya no fue igual: la geometría, el álgebra y la aritmética, la trigonometría, se colocaron en una nueva perspectiva teórica. [...] El cálculo cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Una larga lista de personas trabajaron con los métodos "infinitesimales" pero hubo que esperar hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría construir el cálculo que utilizamos en nuestros días.



Sus aplicaciones son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

Newton y Leibniz son considerados los inventores del cálculo pero representan un eslabón en una larga cadena iniciada muchos siglos antes. Fueron ellos quienes dieron a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores inmediatos, Barrow y Fermat, la unidad algorítmica y la precisión necesaria como método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior. Estos desarrollos estuvieron elaborados a partir de visiones de hombres como Torricelli, Cavalieri y Galileo, o Kepler, Valerio y Stevin. Los alcances de las operaciones iniciales con infinitesimales que estos hombres lograron fueron también resultado directo de las contribuciones de Oresme, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente, el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras. Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe reconocerse que una de las contribuciones previas decisivas fue la geometría analítica desarrollada independientemente por Descartes y Fermat.

Sin la contribución de éstos y de muchos otros hombres más, el cálculo de Newton y Leibniz seguramente no existiría. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió la Europa del siglo XVII. El cálculo diferencial e integral están en el corazón del tipo de conocimiento, cultura y de sociedad de la que, en esencia, somos parte.

El extraordinario avance registrado por la matemática, la física y la técnica durante los siglos XVIII, XIX y XX se lo debemos al cálculo infinitesimal, por lo que puede considerársele como una de las joyas de la creación intelectual de la que el hombre puede sentirse orgulloso.

## El siglo XVII y la disputa por la creación del cálculo

En sus comienzos el cálculo fue desarrollado para estudiar cuatro problemas científicos y matemáticos:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período conocido.

En parte, estos problemas fueron analizados por las mentes más brillantes del siglo, concluyendo en la obra cumbre del filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz y el físico-matemático inglés Isaac Newton: la creación del cálculo. Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. Los trabajos de Newton están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y, a diferencia de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de *x* muy pequeño se llama diferencial de *x*, y se anota *dx*. Lo mismo ocurre para *y* (con notación *dy*). Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales (*dy*/*dx*). No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal sean poco rigurosos. Se puede decir que el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de Leibniz se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos [...].

Resulta muy interesante la larga y lamentable polémica desatada a raíz de la prioridad en el descubrimiento [...].

La discusión siguió hasta mucho después de la muerte de los dos grandes protagonistas y, por fortuna, hoy ha perdido interés y la posteridad ha distribuido equitativamente las glorias. Hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultánea entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.


Gottfried Wilhelm Leibniz.


Isaac Newton.

La difusión de las nuevas ideas fue muy lenta y al principio sus aplicaciones escasas. Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas. Los nuevos logros fueron sometidos a severas críticas; la justificación y las explicaciones lógicas y rigurosas de los procedimientos empleados no se dieron hasta avanzado el siglo XIX, cuando aparecieron otros matemáticos, más preocupados por la presentación final de los métodos que por su utilización en la resolución de problemas concretos.

## El siglo XVIII

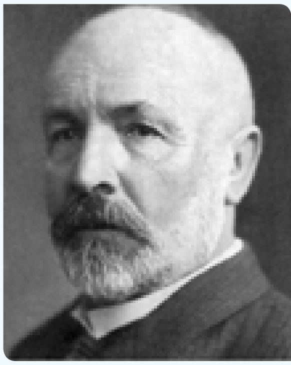
Durante buena parte del siglo los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así, los hermanos Bernoulli inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés Monge la geometría descriptiva. Lagrange, también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrolló la teoría de grupos. Su contemporáneo Laplace escribió *Teoría analítica de las probabilidades* (1812) y el clásico *Mecánica celeste* (1799-1825), que le valió el sobrenombre de "el Newton francés".

Sin embargo, el gran matemático del siglo fue el suizo Euler, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas. El éxito de Euler y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo. La teoría de Newton se basó en la cinemática y las velocidades, la de Leibniz en los infinitésimos, y el tratamiento de Lagrange era completamente algebraico y basado en el concepto de las series infinitas. Todos estos sistemas eran inadecuados en comparación con el modelo lógico de la geometría griega, y este problema no fue resuelto hasta el siglo posterior.

A los matemáticos de fines del siglo el horizonte matemático les parecía obstruido. Se había llegado al estudio de cuestiones muy complicadas a las que no se les conocía o veía un alcance claro. Los sabios sentían la necesidad de estudiar conceptos nuevos y hallar nuevos procedimientos.

## El siglo XIX

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. Euler, Lagrange y el matemático francés Fourier aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán Dirichlet quien propuso su defi-



Gerog Cantor.

Karl Weierstrass.

nición en los términos actuales. En 1821 Cauchy, un matemático francés, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y se dedicó a dar una definición precisa de "función continua". Basó su visión del cálculo sólo en cantidades finitas y el concepto de límite. Esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales. Los matemáticos alemanes Cantor y Weierstrass también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo.

Además de fortalecer los fundamentos del análisis, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, se llevaron a cabo importantes avances en esta materia. Gauss, uno de los más importantes matemáticos de la historia, dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado en los trabajos de Cauchy, Weierstrass y el matemático alemán Riemann. Otro importante avance fue el estudio de las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas, herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas, por parte de Fourier. Cantor estudió los conjuntos infinitos y una aritmética de números infinitos. La teoría de Cantor fue considerada demasiado abstracta y criticada. Encontramos aquí un espíritu crítico en la elaboración de estas nociones tan ricas. Esto constituye un punto de vista muy diferente del que animaba a los matemáticos del siglo anterior. Ya no se trata de construir expresiones ni forjar nuevos métodos de cálculo, sino de analizar conceptos considerados hasta entonces intuitivos.

Gauss desarrolló la geometría no euclidiana pero tuvo miedo de la controversia que pudiera causar su publicación. También en este siglo se pasa del estudio simple de los polinomios al estudio de la estructura de sistemas algebraicos.

Los fundamentos de la matemática fueron completamente transformados durante el siglo XIX, sobre todo por el matemático inglés Boole en su libro *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854).

## Siglo XX y nuestros días

Es importante el aporte realizado por Lebesgue referido a la integración y a la teoría de la medida y las modificaciones y generalizaciones realizadas por matemáticos que lo sucedieron.

En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, el matemático alemán David Hilbert, contribuyente sustancial en casi todas las ramas de la matemática, retomó veintitrés problemas matemáticos que él creía podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que recién comenzaba. Estos problemas fueron el estímulo de una gran parte de los trabajos matemáticos del siglo [...].

## Conclusiones

El progreso de las ideas no se da en el tiempo a través de una trayectoria perfectamente delineada y preconcebida; existen muchos elementos que en la construcción son desechados, reformulados o agregados. Las concepciones filosóficas sobre la realidad, el papel de la ciencia, y en especial sobre las características que debe reunir el conocimiento matemático para considerarse científico determinaron los enfoques realizados en cada época. El impacto que tuvieron los personajes y las contribuciones consignadas en la historia difícilmente puede ser comprendida a cabalidad si estos aspectos no se toman en cuenta.

*Un poco de historia y el nacimiento del cálculo*, en <http://www.fca.unl.edu.ar/ Intdef/Historia1.htm#Indice>, consulta: mayo de 2016.

**Con base en el texto anterior, lee las siguientes preguntas y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.**

1. De acuerdo con el texto, ¿quiénes fueron considerados los inventores del cálculo?

   ⓐ Aristóteles y Platón.

   ⓑ Newton y Leibniz.

   ⓒ Newton y Platón.

   ⓓ Leibniz y Ptolomeo.

2. ¿Quién fue el matemático más sobresaliente del siglo XVIII?

   ⓐ Euler.

   ⓑ Laplace.

   ⓒ Lagrange.

   ⓓ Bernoulli.

3. ¿En qué siglo se dio prioridad a la definición de la palabra función?

   ⓐ XVII

   ⓑ XVIII

   ⓒ XIX

   ⓓ XX

4. ¿Cuántos fueron los problemas retomados por David Hilbert, sobre los que pensaba podrían ser la meta de la investigación matemática de ese siglo?

   ⓐ 20

   ⓑ 21

   ⓒ 22

   ⓓ 23

5. A lo que Newton llamo fluxión, ¿cómo lo representaba Leibniz?

   ⓐ Como una derivada.

   ⓑ Como una suma de diferenciales.

   ⓒ Como una división de diferenciales.

   ⓓ Como una multiplicación de diferenciales.

## Evaluación diagnóstica

**Lee con atención cada pregunta y responde según tus conocimientos.**

1. En tus propias palabras, define lo que es una función.

___

2. Menciona lo que entiendas por teorema.

___

3. ¿Qué es una tangente?

___

4. ¿Cómo se define una secante?

___

5. Cita las partes de la elipse.

___

6. ¿Qué es una función racional?

___

7. Menciona en qué casos la operación de división no está definida.

___

8. Define la noción de lugar geométrico.

___

9. En tus propias palabras, define lo que es aceleración de un cuerpo.

___

10. ¿Cuáles son las partes de la circunferencia?

___

11 horas

# 3.1 Representa gráficamente funciones, límites y continuidad mediante su ecuación o elementos que la integran

En esta unidad estudiarás funciones, límites y el concepto de derivada, los cuales son la base del Cálculo diferencial. La noción intuitiva de límite es un término que ayuda a la introducción de la derivación, por lo tanto, es fundamental comprender el concepto de derivada de una función y deducir las reglas de derivación.

## Actividad de inicio

Reflexión

VALORES

TIC

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
| ATRIBUTO | • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. |

1. En equipo de cuatro integrantes, investiguen en fuentes confiables de libros, internet y diccionarios matemáticos el concepto de "funciones".
2. Hagan un mapa conceptual del tema.
3. Presenten su mapa conceptual en clase.

NO ABANDONO

"Con cada hora perdida, perece una parte de la vida. Los hechos hacen al hombre".
Gottfried Leibniz

# Identificación de la naturaleza de las funciones

## Funciones algebraicas

Una función algebraica es una expresión que satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes son a su vez polinomios o monomios. Por ejemplo:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_0(x) = 0$$

Los coeficientes de esta ecuación son funciones polinómicas de $x$.

### Dominio

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores válidos que puede tomar la variable independiente $x$.

**Ejemplo:**
Sea $f$ una función con dominio $\mathbb{R}$ (los números reales), tal que $f(x) + x^2$ para todo $x$ en $\mathbb{R}$; calcular $f(-6)$ .

El resultado corresponde a la sustitución del número real $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = x^2$$
$$f(-6) = (-6)^2$$
$$f(-6) = 36$$

### Contradominio

El contradominio o imagen de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente $y$.

Para que una relación de un conjunto $A$ en otro $B$ sea una función debe cumplir las siguientes condiciones:

- Todo elemento del conjunto de partida $A$ debe tener imagen.
- La imagen de cada elemento $x \in A$ tiene una y sólo una imagen $y \in B$

El conjunto formado por todos los elementos de $B$ que son imagen de algún elemento del dominio se denomina conjunto imagen o recorrido de $f$.

**Ejemplo:**
Dado el siguiente conjunto de pares ordenados: (4, 12), (6, 7), (–1, 4), (2, 3), (–3, 6), determinar el dominio y contradominio.

En este caso, el dominio corresponde a los primeros elementos de los pares ordenados, esto es, 4, 6, –1, 2 y –3. El contradominio son los segundos elementos de dichos pares, es decir, 12, –7, 4, 3 y 6.

CURIOSIDADES

El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia $x^n$ de la variable $x$. En 1694, el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Hasta fechas recientes, su uso más generalizado ha sido el dado en 1829 por el matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Una función es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. En palabras del matemático alemán J. P. G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859), se comienza con “una **variable**, [que] es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ellos. Dos variables $X$ y $Y$ están asociadas de tal forma que al asignar un valor a $X$ entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a $Y$, y se dice que $Y$ es una función (unívoca) de $X$. La variable $X$, a la que se asignan libremente valores, se llama variable **independiente**, mientras que la variable $Y$, cuyos valores dependen de $X$, se llama variable **dependiente**. Los valores permitidos de $X$ constituyen el **dominio** de definición de la función, [en tanto que] los valores que toma $Y$ constituyen su **recorrido**”.

Algunas observaciones sobre las funciones:

- En una función $F: A \to B$, todo elemento $x \in A$ tiene una y sólo una imagen $y \in B$.
- Un elemento $y \in B$ puede:
  - No ser imagen de ningún elemento $x \in A$.
  - Ser imagen de uno o más elementos en $A$.
- La relación inversa $f^{-1}$ de una función $f$ puede no ser una función.

TIC

En el video "Funciones, dominio, contradominio, rango, gráfica, creciente, decreciente, explícita, implícita" podrás conocer qué son las funciones algebraicas.

https://www.youtube.com/watch?v=Tdw7SIp0MpE

## Tabulación

Como se ha mencionado, una función puede representarse de diferentes maneras. Una de ellas es la tabulación. Este tipo de representación resulta sencilla debido al orden que presenta. Cada fila corresponde a un valor de función compuesto por diferentes atributos divididos en columnas que identifican la característica del atributo. La siguiente tabla ejemplifica una función.

| Año | Población |
|---|---|
| 1650 | 600 |
| 1700 | 700 |
| 1750 | 800 |
| 1800 | 900 |
| 1850 | 1 000 |
| 1900 | 1 100 |
| 1950 | 1 200 |

En la tabla anterior, la variable independiente es el año y la variable dependiente es la población. De esta forma, la tabla representa la función Población = $f(x)$, donde la variable $x$ representa el año.

## Graficación

Otra forma de representar una función es a través de una gráfica. Las gráficas permiten observar variaciones o tendencias en los datos. De igual manera, revelan la forma que adoptan éstos: una elipse, una línea recta, etc. La **figura 3.1** ilustra la representación de la función de la tabla anterior mediante una gráfica.

Es importante mencionar que la forma de representar una función no es independiente de las demás. Por ejemplo, la tabulación permite generar una gráfica específica.

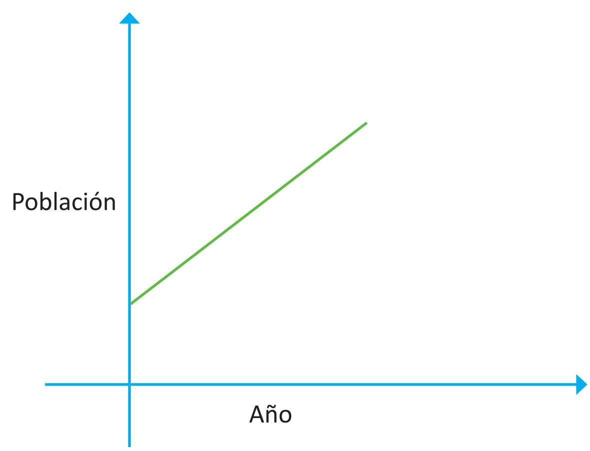



Figura 3.1. Representación de una función a través de una gráfica.

Una forma adicional de representar una función es con una fórmula. Es la más común y se expresa como sigue:

$$f(x) = x + 12$$

Esta última forma resulta familiar debido a que muchas de las ecuaciones que se han estudiado a lo largo de las unidades anteriores tienen un aspecto similar.

## Actividad de desarrollo

Laboriosidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

ATRIBUTO

- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

**1.** En pareja, pongan en práctica lo aprendido hasta el momento. Para ello, resuelvan los siguientes ejercicios en su cuaderno.

1) Sean A = {1, 2, 3} y B = {1, 2, 3, 4, 5}. Encuentren una relación que se considere como una función uno a uno.

2) Determinen la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 7$, donde $x \in Z$.

b) $f(x) = 3x + 1$, donde $x \in R$.

3) Sean A = {1, 2, 3} y B = {a, b, c}. Enumeren tres funciones de *A* en *B*.

**2.** Entreguen sus respuestas al profesor.

NO ABANDONO

"El conocimiento descansa no sólo sobre la verdad, sino también sobre el error".
Carl Jung

# Tipos de funciones

No sólo existen diferentes formas de representar una función sino también diferentes tipos de funciones. A continuación, se listan los diferentes tipos de funciones:

- Función inyectiva o función uno a uno.
- Función epiyectiva o sobreyectiva.
- Función biyectiva.

Una función $f: A \rightarrow B$ se dice que es **inyectiva** si y sólo si elementos distintos en *A* le corresponden imágenes distintas en *B*.

Una función $f: A \rightarrow B$ es **epiyectiva** o **sobreyectiva** si y sólo si todo elemento de *B* es imagen de algún elemento de *A*.

Una función $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y epiyectiva.

# Actividad de desarrollo

Perseverancia

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

ATRIBUTO

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

**1.** De forma individual, pon en práctica lo que has aprendido. Para ello, resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

1) Dada la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = 3x^2 + 2$, ¿cuál es el valor de $f(-5)$?

2) ¿Cuál es el valor de $f(4) + f(-2)$ si $f: R \rightarrow R$ y está definida por $f(x) = x^2 + x - 1$?

3) ¿Cuál es el valor de $\frac{f(-3) \bullet f(1)}{f(4)}$ si $f: R \rightarrow R$ se encuentra definida por $f(x) = x^2 + 2x - 1$?

4) ¿Cuál es el dominio de la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = \frac{2x^2 + 4}{2x - 2}$ ?

**2.** Compara tus respuestas con un compañero, corrige de ser necesario y entrega tus resultados al profesor.

# Funciones racionales

Muchas funciones se forman a partir de otras funciones (que pueden ser polinomiales) mediante operaciones (como la composición). En esta sección se formará una clase especial de funciones con el cociente de dos funciones polinomiales.

Una función racional $y = f(x)$ es una función que tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios.

TIC

En el siguiente enlace encontrarás las instrucciones para construir juegos que te ayudarán a reforzar tus conocimientos.

https://anagarcia-azcarate.wordpress.com/2015/06/09/bingo-de-la-funcion-lineal/

## Dominio

Tal como ocurre con las funciones algebraicas, el término dominio para una función racional representa el conjunto de valores permitidos que puede adoptar la variable independiente $x$.

## Contradominio

El contradominio o imagen de las funciones racionales es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente $y$.

## Tabulación

El objetivo de tabular una función racional es encontrar el punto donde la misma puede o no estar definida. Este aspecto es importante para los temas siguientes debido a que el resultado de la función puede no estar definido para un cierto valor, pero se puede aproximar al resultado ilustrándolo a través de una tabla

**Ejemplo:**

Tabular la función $f(x)=\frac{2}{x-1}$

Al observar la función es fácil darse cuenta que cuando $x = 1$ la función no está definida. Así, aunque el número 1 no está en el dominio de la función dada, se puede evaluar $f$ en valores de $x$ cercanos a él. Por ejemplo, en la siguiente tabla se puede verificar lo anterior.

| $x$ | –1 | 0.999 | 1.001 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | –2.000 | 2.000 | 1 |

Por otra parte, cuando $|x|$ toma valores muy grandes, los valores correspondientes a la función $f(x)$ tienden a cero. La siguiente tabla muestra el caso descrito.

| $x$ | –999 | 10 001 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | –0.002 | 0.002 |

Como se verá más adelante, si $a$ es un cero en el denominador puede ocurrir una de varias situaciones, las cuales se observan en la siguiente tabla.

| Notación | Descripción |
|---|---|
| $x \to a^-$ | $x$ se aproxima a $a$ desde la izquierda (valores menores que $a$). |
| $x \to a^+$ | $x$ se aproxima a $a$ desde la derecha (valores mayores que $a$). |
| $f(x) \to \infty$ | $f(x)$ aumenta sin límite (puede ser tan positiva como desee). |
| $f(x) \to -\infty$ | $f(x)$ disminuye sin límite (puede ser tan negativa como desee). |

El símbolo $\infty$, que se lee como "infinito", y $-\infty$, que se lee como "menos infinito", no representan números reales; simplemente especifican ciertos tipos de comportamiento de funciones y variables.

## Graficación

Graficar una función racional resulta una tarea más complicada que graficar una función algebraica. Para graficar una de estas funciones se deben considerar los siguientes puntos:

- Las intersecciones con los ejes.
- La simetría.
- El desplazamiento, reflexión o estiramiento de gráficas conocidas; igualmente se debe considerar el dominio de $f$.
- Los grados de $g(x)$ y $h(x)$.

Los últimos dos puntos permiten determinar si la gráfica de una función racional tiene asíntotas. Además de los puntos anteriores, es importante contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué se puede decir de los valores de la función $f(x)$ cuando $x$ está cercana (pero no igual) a un cero del denominador?
- ¿Qué puede decirse de los valores de la función $f(x)$ cuando $x$ es muy grande, bien positiva o bien negativa?

La intersección con el eje $y$ está en el punto $(0, f(0))$, siempre que el número 0 esté en el dominio de $f$. Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x)=\frac{1-x}{x}$ no cruza el eje $y$ debido a que $f(0)$no está definida. Si los polinomios $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes, entonces, las intersecciones con el eje $x$ en la gráfica de la función racional $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ se obtienen al hacer $f(x) = 0$. La gráfica de una función racional $f$ es simétrica con respecto al eje $y$ si $f(-x) = f(x)$, o bien simétrica con respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$. Como es fácil averiguar si una función polinomial es par o impar, una forma fácil de determinar la simetría de la gráfica racional es la siguiente:

- Se considera que $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes.
- El cociente de dos funciones pares es par.
- El cociente de dos funciones impares es par.
- El cociente de una función par y una impar es impar.

**Ejemplo:**

Graficar la función $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

La gráfica no tiene simetría porque $f(x)$ no es función par ni impar. Como $f(0) = -2$, la intersección con el eje $y$ está en el punto $(0, -2)$. Como $g(x)$ nunca es cero, no hay intersecciones con el eje $x$. La **figura 3.2** muestra la gráfica de esta función.

En la **figura 3.2** la recta vertical de ecuación $x = 1$ se denomina **asíntota vertical** de la gráfica de $f$, y la recta horizontal cuya ecuación es $y = 0$ se llama **asíntota horizontal** de la gráfica $f$.

La característica de cualquier asíntota es que la gráfica de una función $f$ debe acercarse, o tender, a dicha recta.

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función $f$ si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

1. $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^-$
2. $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$
3. $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$
4. $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$
5. $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$
6. $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$

La **figura 3.3** ilustra cuatro de las seis posibilidades antes mencionadas.

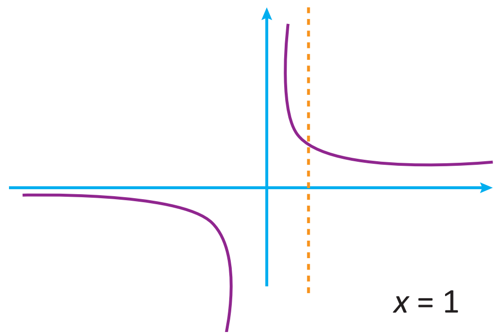



Figura 3.2. Gráfica de la función racional $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

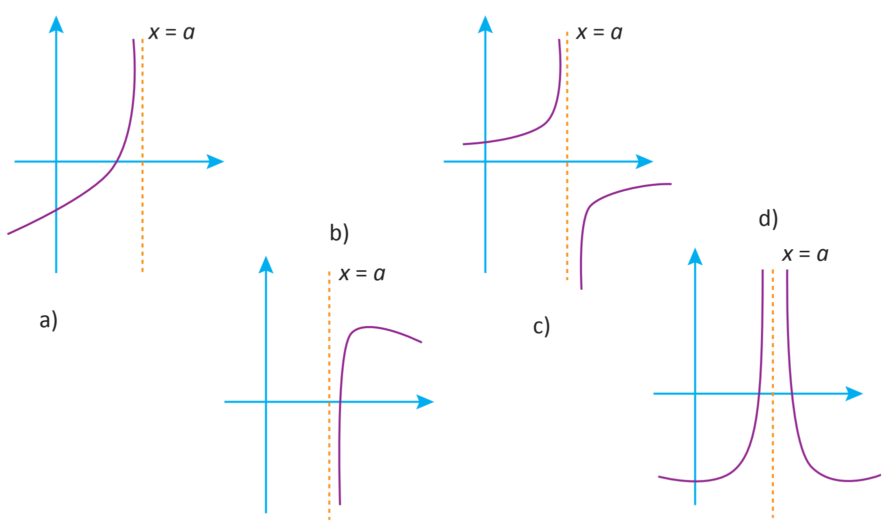



Figura 3.3. Cuatro posibles escenarios de asíntota vertical: a) caso 4, b) caso2, c) casos 4 y 2, y d) caso 6.

Si $x$ = a es una asíntota vertical de la gráfica de una función racional $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, entonces, los valores de la función $f(x)$ se vuelven no acotados cuando x tiende a a desde ambos lados. Las gráficas c) y d) de la **figura 3.3** son gráficas típicas de una función racional con una sola asíntota vertical. Tal como se puede apreciar, una función racional con una asíntota vertical es una **función discontinua**.

Ahora bien, se dice que una recta $y = c$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función $f$ si $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ o si $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$.

La **figura 3.4** ilustra cuatro tipos comunes de asíntotas horizontales.

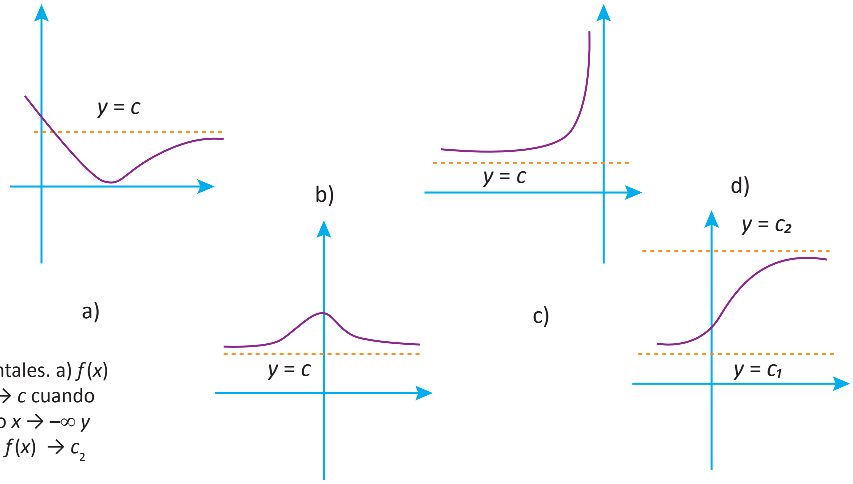



Figura 3.4. Asíntotas horizontales. a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$, b) $f(x) \to c$ cuando $x \to \pm\infty$, c) $f(x) \to x$ cuando $x \to -\infty$ y d) $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$.

En la **figura 3.4** d) se presenta un caso especial en el que aparecen dos asíntotas horizontales, puesto que es importante mencionar que el número máximo de asíntotas horizontales es precisamente dos. Si la gráfica de una función racional $f$ tiene una asíntota horizontal $y = c$, entonces, como se ve en la figura 3.4 b):

$$f(x) \to c, \text{ cuando } x \to \pm\infty$$

Esta ecuación es una descripción del comportamiento en los extremos de la gráfica de una función racional con asíntota horizontal. De igual modo, la gráfica de una función nunca puede cruzar una asíntota vertical pero, como se puede apreciar en la **figura 3.4** a), una gráfica sí puede cruzar una asíntota horizontal.

## Determinación de asíntotas verticales

Supongamos que los polinomios $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes, entonces:

- Si $a$ es un número real tal que $h(a) = 0$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f$.

**Ejemplo:**

Considerar la siguiente función racional:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+4}$$

El denominador $h(x) = x^2 + 4 = (x + 2)(x–2) = 0$ en $x = –2$ y en $x = 2$. Las anteriores son las ecuaciones de las asíntotas verticales de la gráfica $f$, que tiene tres ramas: una a la izquierda de la recta $x = –2$, una entre las rectas $x = –2$ y $x = 2$, y una a la derecha de la recta $x = 2$.

## Determinación de las asíntotas horizontales

Cuando se desea determinar si una función racional tiene o no una asíntota horizontal se deben considerar las siguientes reglas:

- Si el grado de $g(x)$ es igual al grado de $h(x)$, entonces $y=\frac{a_n}{b_m}$ (el cociente de los primeros coeficientes) es una asíntota horizontal.
- Si el grado de $g(x)$ es menor al grado de $h(x)$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal.
- Si el grado de $g(x)$ es mayor que el grado de $h(x)$, entonces la gráfica $f$ no tiene asíntota horizontal.

**Ejemplo:**

Determinar si la gráfica de cada una de las siguientes funciones racionales tiene una asíntota horizontal.

- $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{8x^2+x}$
- $f(x)=\dfrac{4x^2+7x+8}{2x^4+3x^2-x+6}$
- $f(x)=\dfrac{5x^3+x^2+1}{2x+3}$

Para el primer caso, dado que el grado del numerador es igual al grado del denominador (ambos son de grado 2), entonces:

$$f(x)\approx\frac{3}{8} \quad \text{cuando} \quad x\to\pm\infty$$

Así que la asíntota vertical es $y=\frac{3}{8}$

En el segundo caso, el grado del numerador es menor que el del denominador (3 < 4 ), por lo que tenemos lo siguiente:

$$f(x)\approx\frac{4}{2}x^{3-4}=\frac{2}{x}\to 0 \quad \text{cuando} \quad x\to\pm\infty$$

De esta forma, la asíntota horizontal se encuentra en $y = 0$

Finalmente, para el tercer caso tenemos que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador (3 > 1), por tanto la gráfica de $f$ no tiene asíntota horizontal.

## Actividad de desarrollo

Tenacidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

ATRIBUTO

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

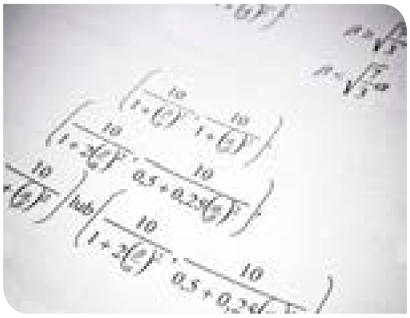
**1.** De forma individual, pon en práctica lo que has aprendido hasta el momento. Para ello, resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

1) Despeja a $y$ de la expresión $xy = 8$. ¿Qué tipo de función es?

2) Representa gráficamente la función del ejercicio anterior, donde x = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

3) Representa en forma gráfica la función $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-1}$ y halla su dominio.

**2.** Entrega tus resultados al profesor.



# Cálculo de límites de funciones

## Límites de una función

El límite de una función está relacionado con los valores que toma la función en lugares cercanos a un punto de interés. El límite de una función en un punto indica el comportamiento de la misma en una zona cercana al punto en cuestión.

### Definición de límites

Si se sabe que una función $f(x)$ tiende a algún número cuando $x$ tiende a a, pero tal número no se conoce, entonces se dice que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a a existe, o simplemente que:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Entonces, un límite existe si cumple con las siguientes condiciones:

- El límite de $f(x)$ existe cuando $x$ tiende a a por la izquierda.
- El límite de $f(x)$ existe cuando $x$ tiende a a por la derecha.
- El límite por la izquierda es igual al límite por la derecha.

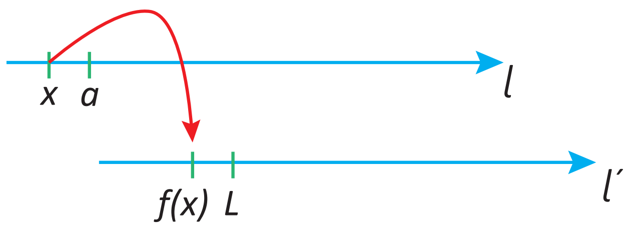



Figura 3.5. Límites

Deben considerarse los tres puntos anteriores cuando se resuelvan problemas relacionados con límites.

El dominio y el contradominio de la función $f$ se representan con dos puntos sobre dos rectas coordenadas $l$ y $l'$, tal como se ilustra en la **figura 3.5**. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces, cuando x tiende a $a$, $f(x)$ tiende a $L$. Cuando esto sucede, no importa el modo en que $x$ tiende a $a$. De esta manera, en la **figura 3.5** $x$ puede acercarse a $a$ por la izquierda $(x \to a^-)$ o por la derecha $(x \to a^+)$, o bien oscilando de un lado a otro de $a$.

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo estimar un límite de manera numérica mediante la construcción de una tabla, o bien de manera gráfica construyendo una representación.

**NO ABANDONO**

"No aprendemos para la escuela sino para la vida".
Séneca

**Ejemplo 1:**

Calcular el siguiente límite en forma numérica completando la tabla.

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

| $x$ | –0.01 | –0.001 | –0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.9949 | 1.9995 | 1.9999 | ¿? | 2.00005 | 2.0005 | 2.00499 |

De los datos presentados en la tabla se puede estimar que el límite es 2. La **figura 3.6** confirma los datos anteriores.

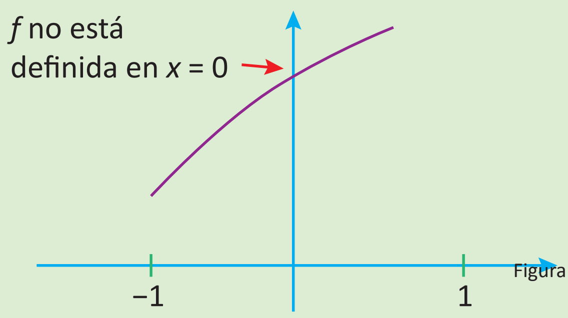



Figura 3.6. Cálculo de límites.

Es importante observar en el ejemplo 1 que la función no está definida en $x = 0$ y aún así $f(x)$ parece aproximarse a un límite a medida que $x$ se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percatarse de que la existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = a$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$.

**Ejemplo 2:**

Encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2, donde $f$ se define como:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$$

Puesto que $f(x) = 1$ para todos los $x$ distintos de 2, se puede concluir que el límite es 1. Por tanto se puede escribir:

$$\lim_{x\to a} f(x)=1$$

El hecho de que $f(2) = 0$ no influye ni en la existencia ni en el valor del límite cuando x se aproxima a 2. Así, si se hubiera definido la función como:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

el límite sería el mismo.

Cuando una función no posee un límite, el comportamiento asociado a la no existencia de éste es de la siguiente forma:

- $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de a que por la izquierda.
- $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite a medida que $x$ se aproxima a $a$.
- $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a medida que $x$ a aproxima a $a$.

Ahora se presenta una definición más formal sobre límites:

Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto que contiene a $a$ y L es un número real. Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

Algunas funciones carecen de límite cuando $x \to a$, pero aquéllas que lo poseen no pueden tener otro diferente asociado. Esto es, si el límite de una función existe, entonces es único.

## Interpretación geométrica

Retomemos la definición de límite: sea $f$ una función definida en un intervalo abierto que contiene a $a$ y $L$ es un número real. Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

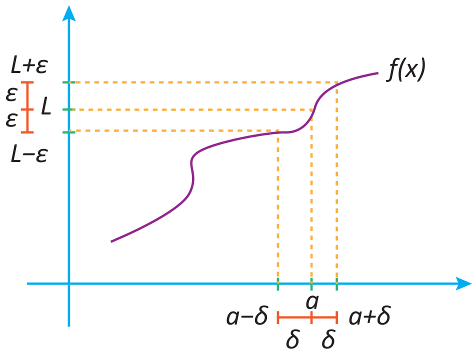


Figura 3.7. Interpretación geométrica del límite.

Lo anterior significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$. Los símbolos $\varepsilon$ y $\delta$ representan a las letras griegas épsilon y delta, respectivamente.

La definición anterior se puede interpretar geométricamente como se muestra en la **figura 3.7**.

En consecuencia, al considerar geométricamente el límite de una función se indican los elementos cercanos, por la izquierda ($a - \delta$) y por la derecha ($a + \delta$), al punto de atención en la recta, en este caso $a$, cuya imagen se acerca al valor de $L$.

**Ejemplo 1:**

Graficar el siguiente límite considerando los elementos $\varepsilon$ y $\delta$ de la definición:

$$\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+3\right)=5$$

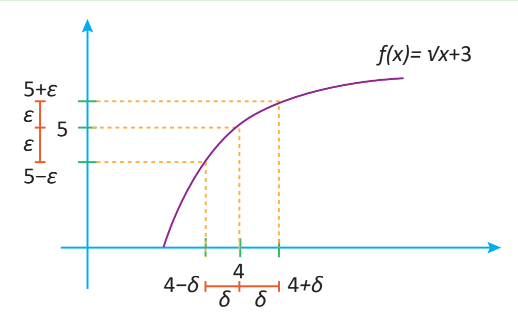


Figura 3.8. Interpretación geométrica de un límite.

La **figura 3.8** ilustra el límite solicitado. En ella se observa el conjunto de elementos cercanos a 4, nuestro punto de atención en el eje $x$. Cada elemento de este conjunto tiene como imagen un elemento cercano al punto 5 en el eje $y$. La idea es que el valor de $\delta$ sea el menor posible de tal manera que se pueda determinar en forma sencilla el límite de $x$.

**Ejemplo 2:**

Dado el límite:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$$

encontrar $\delta$ tal que $|(2x–5)–1|<0.01$, siempre que $0<|x–3|<\delta$

Este problema define a $\varepsilon$ con el valor 0.01. Para encontrar un $\delta$ adecuado se debe considerar que:

$$|(2x–5)-1| = |2x–6| = 2|x–3|$$

Dado que la desigualdad $|(2x–5)–1|<0.01$ es equivalente a $2|x–3|<0.01$, se puede escoger el valor de $\delta=\frac{1}{2}(0.01)=0.005$. En otras palabras:

$$0<|x–3|<0.005$$

La expresión anterior implica que:

$$|(2x–5)-1| = 2|x–3| <2(0.005) = 0.01$$

## Límites por la izquierda y por la derecha

El límite de una función puede calcularse en dos formas: por la derecha o por la izquierda. Tales límites se denotan de la siguiente manera:

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Como se puede apreciar, el límite por la derecha se denota con el signo + (más), mientras que para el límite por la izquierda se utiliza el signo – (menos). Resulta importante recordar que si los límites por la derecha e izquierda son iguales el límite de la función existe.

El cálculo del límite por la derecha indica todos los valores de $x$ menores que $a$, mientras que el cálculo del límite por la izquierda indica todos los valores de $x$ mayores que $a$.

En el siguiente link podrás encontrar más sobre este tema, así como ejemplos muy útiles

http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Limites/

**Ejemplo:**

Calcular el límite por la derecha y por la izquierda cuando $x$ tiende a 1 para la función dada.

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 + 1 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \\ x + 1 \text{ si } x > 1 \end{Bmatrix}$$

En primer lugar, recordemos las reglas de existencia de un límite:

1. El límite de $f(x)$ existe cuando $x$ tiende a a por la izquierda.
2. El límite de $f(x)$ existe cuando $x$ tiende a a por la derecha.
3. El límite por la izquierda es igual al límite por la derecha.

Por tanto, para que un límite exista debe cumplir con estas tres reglas. La siguiente tabla ilustra las aproximaciones al límite solicitado, tanto por la derecha como por la izquierda.

| $x$ | 0 | 0.5 | 0.9 | 0.99 | 1 | 1.01 | 1.1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1.25 | 1.81 | 1.98 | 1 | 2.01 | 2.1 | 2.5 | 3 |

Como se puede observar, el límite de $x$ cuando tiende a 1 es 2.

# Propiedades de los límites

## Algunos límites básicos

El cálculo de límites puede simplificarse aplicando algunas reglas. A continuación, se presentan tres reglas básicas de los límites.

- $\lim_{x\to a} b = b$, donde $b$ es una constante.
- $\lim_{x\to a} x = a$
- $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

## Suma de límites

La suma de límites se puede interpretar como la suma de las soluciones independientes de cada límite. Esto quiere decir que se debe resolver por separado cada límite y luego sumar las soluciones:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=L+K$$

**Ejemplo:**

Calcular el límite de *x* cuando tiende a 2 de *f*(*x*) = *x* + 3

$$\lim_{x\to a}(x+3)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=2+3=7$$

## Diferencia de límites

La diferencia de límites es similar a la suma de los mismos con la única diferencia del signo. Tal como en la suma, se debe resolver cada límite por separado para después aplicar la diferencia.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=L-K$$

**Ejemplo:**

Calcular el límite de *x* cuando tiende a 2 de *f*(*x*) = *x* – 3

$$\lim_{x\to 2}(x-3)=\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}2=2-3=-1$$

## Límite de una constante

El límite de una constante es el cálculo más sencillo debido a que el resultado es la misma contante.

$$\lim_{x\to a}b=b$$

**Ejemplo:**

Calcular el límite de *x* cuando tiende a 2 de *f*(*x*) = 3

$$\lim_{x\to 2}3=3$$

## Límite de una constante multiplicada por una función

El proceso de multiplicar una constante por una función no afecta el procedimiento tradicional para resolver un límite: el resultado debe multiplicarse por la constante. A este proceso se le denomina múltiplo escalar.

$$\lim_{x\to a}\left[bf(x)\right]=bL$$

**Ejemplo:**

Calcular el límite de $x$ cuando tiende a 2 de $f(x) = 5x$

$$\lim_{x\to 2} 5x = 5\lim_{x\to 2} x = 5 \bullet 2 = 10$$

## Límite de un producto

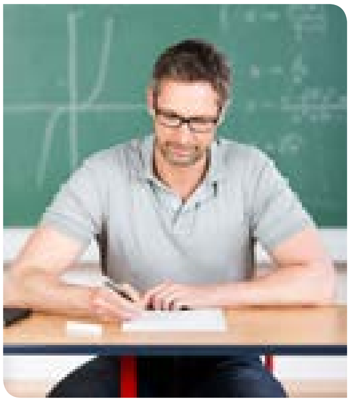
El producto de límites sigue un procedimiento similar a la suma y diferencia. Cada límite debe evaluarse de manera independiente, y el resultado de cada uno de ellos debe multiplicarse para obtener la solución.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \bullet g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \bullet \lim_{x\to a} g(x) = L \bullet K$$

**Ejemplo:**

Calcular el límite de $x$ cuando tiende a 2 del producto entre $f(x) = x$ y $g(x) = x$

$$\lim_{x\to 2}\left[f(x) \bullet g(x)\right] = \lim_{x\to 2} f(x) \bullet \lim_{x\to 2} g(x) = 2 \bullet 2 = 4$$



## Límite de un cociente

El cociente de dos límites se calcula dividiendo la solución independiente de cada límite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{K}$$

**Ejemplo:**

Calcular el límite de $x$ cuando tiende a 4 del cociente entre $f(x) = 1$ y $g(x) = x + 3$

$$\lim_{x\to 4}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to 4} f(x)}{\lim_{x\to 4} g(x)} = \frac{\lim_{x\to 4} 1}{\lim_{x\to 4} x + 3} = \frac{1}{7}$$

## Límite de una potencia

Trabajar la potencia de un límite implica calcularlo de manera independiente y al resultado aplicar la potencia requerida.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = L^n$$

**Ejemplo:**

Calcular el límite de $x$ cuando tiende a 2 de $f(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

## Estrategia para el cálculo de límites

- Reconocer qué límites pueden evaluarse por medio de la técnica de sustitución directa.
- Si el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$ no se puede evaluar por sustitución directa, entonces se debe intentar encontrar una función $g(x)$ que coincida con $f$ para todo $x$ distinto de $a$. En otras palabras, hay que seleccionar una $g$ tal que el límite de $g(x)$ se pueda evaluar por medio de la sustitución directa.
- Utilizar una gráfica o una tabla para respaldar las conclusiones.

# Continuidad y límites de una función

## Continuidad de una función

En esta sección se prestará atención a los casos en que a se halla en el dominio de $f$. Si $f$ está definida en $a$ y el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces, este límite puede o no ser igual a $f(a)$.

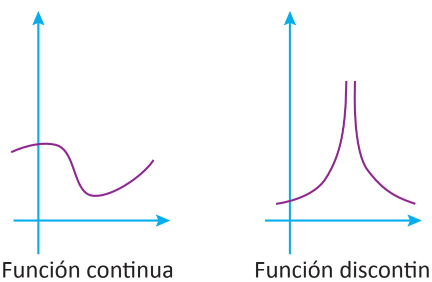



Figura 3.9. Funciones continuas y discontinuas.

### Funciones continuas y discontinuas

Las funciones continuas son aquéllas que no presentan ningún punto aislado, saltos o interrupciones, y que están hechas de un solo trazo en un intervalo determinado. Por otra parte, las funciones discontinuas son las que presentan algún punto aislado, saltos o interrupciones, es decir, no están hechas de un solo trazo en un intervalo determinado. La **figura 3.9** ilustra estos dos tipos de funciones.

Las propiedades sobre límites se pueden utilizar para establecer el siguiente teorema sobre continuidad:

**TEOREMA 3.1:** Si las funciones $f$ y $g$ son continuas en $a$, entonces también lo son la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto $fg$ y, si $g(a)\neq 0$, el cociente $\dfrac{f}{g}$

Las funciones de los siguientes tipos son continuas en sus dominios:

- Funciones polinómicas: $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}c^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0$
- Funciones racionales: $r(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)} \quad h(x)\neq 0$
- Funciones radicales: $f(x)=\sqrt[n]{x}$
- Funciones trigonométricas: *sen* $x$, cos $x$, tan $x$, cot $x$, sec $x$, csc $x$.

**Ejemplo:**

Según lo establecido, cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos de su dominio:

1. $f(x)=x+senx$

2. $f(x)=3\tan x$

3. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\cos x}$

Para funciones compuestas del tipo:

$$f(x)=sen3x \qquad f(x)=\sqrt{x^2+1} \qquad f(x)=\frac{x^2+1}{\cos x}$$

resulta muy útil el siguiente teorema:

**TEOREMA 3.2:** Si g es continua en $a$ y $f$ es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $a$.

Una consecuencia directa de este teorema es que, si $f$ y $g$ satisfacen las condiciones señaladas, es posible determinar que el límite de $f(g(x))$ cuando $x$ se aproxima a $a$ es:

$$\lim_{x\to a} f(g(a))=f(g(a))$$

**Ejemplo:**

Sea $f(x)=|x|$. Probar que $f$ es continua en todo número real $a$.

Como $|x|=\sqrt{x^2}$, tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f|x|=\lim_{x\to a}\sqrt{x^2}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to a} x^2}=\sqrt{a^2}=|a|=f(a)$$

De la definición de continuidad para límites concluimos que $f$ es continua en $a$.

## Continuidad de una función en un punto

Si $\lim_{x\to a} f(x)=a$ entonces $f$ es continua en $a$ si satisface las siguientes condiciones:

1. $f$ está definida en un intervalo abierto que contiene a $a$
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Si $f$ no es continua en $a$, entonces, se dice que es discontinua en $a$, o bien, que tiene una discontinuidad en $a$.

**Ejemplo:**

Demostrar que un polinomio es una función continua en todo número real $a$.

Un polinomio $f$ está definido en todo $\mathbb{R}$. Entonces, recordando las propiedades básicas de los límites, tenemos que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Para todo número real $a$. De esta manera, $f$ satisface las condiciones 1 – 3 y, por tanto, es una función continua en $a$.

**Ejemplo:**

Demostrar que una función racional es continua en todos los números reales de su dominio.

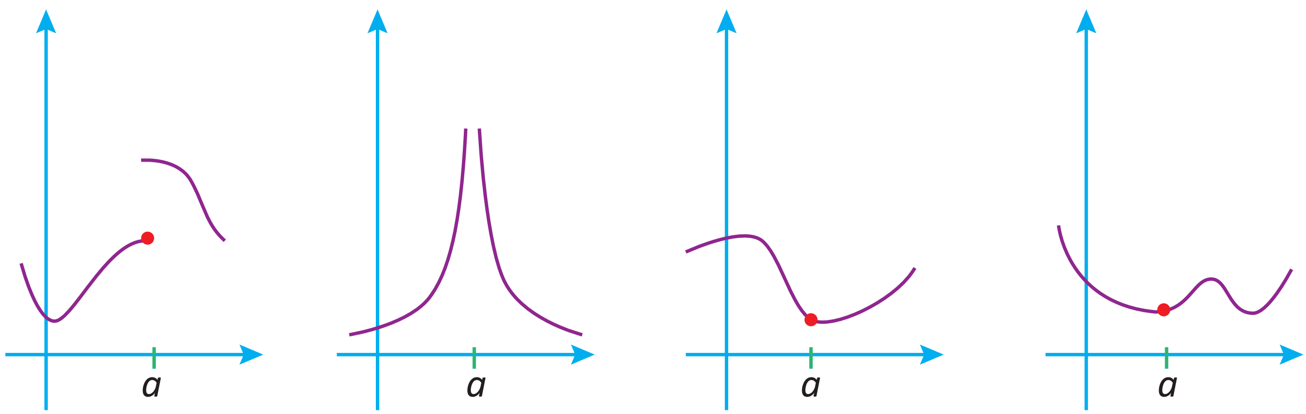
CURIOSIDADES

Algunas veces es útil pensar en la continuidad de una función como aquella función que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel; en otras palabras, que la gráfica no tiene interrupciones.

Si $q$ es una función racional, entonces $q=\frac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. Por tanto, $q$ está definida en todos los números reales excepto en los ceros de $h(x)$. De lo anterior, resulta que si $h(a) \neq 0$, entonces $q$ está definida en un intervalo abierto que contiene a $a$. De nueva cuenta, recordando la propiedad básica de los límites tenemos:

$$\lim_{x\to a} q(x) = q(a)$$

Aplicando las condiciones 1-3, se deduce que $q$ es continua en $a$.



a) Discontinuidad de salto b) Discontinuidad infinita c) Discontinuidad evitable d) Discontinuidad evitable

Figura 3.10. Funciones discontinuas.

En la ***figura 3.10*** se aprecian las gráficas de varias funciones que no son continuas en el número real $a$.

En el caso de la discontinuidad de salto a), los límites por la derecha y por la izquierda cuando $x$ tiende a $a$ existen, pero son distintos y por lo tanto, $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, tal y como se requiere en la condición 2. Para la discontinuidad infinita b) no se satisface ninguna de las tres condiciones. Las discontinuidades evitables c) y d) son parecidas porque $\lim_{x\to a} f(x)$ existe en ambos casos. En c) $\lim_{x\to a} f(x) \neq a$, pues $f$ no está definida en $a$. Sin embargo, en d) $\lim_{x\to a} f(x) \neq a$, a pesar de que $f$ sí está definida en a. Si $f$ es una función que tiene una discontinuidad evitable en $a$ y se define (o redefine) $f(a)$ como el número $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces la nueva función resultante es continua en $a$. Por ejemplo, considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{si } x \neq 9 \\ 6 & \text{si } x = 9 \end{cases}$$

En este caso, $f(x)$ se redefine cuando $x = 9$. De esta manera, se evita la discontinuidad de la función original en $a = 9$.

## Continuidad de una función en un intervalo

Cuando se requiere estudiar la continuidad de una función es conveniente obtener los intervalos más grandes en los que sea continua. Por supuesto, la función también es continua en cualquier subintervalo formado a partir de esos intervalos.

Si una función $f$ es continua en todos los números de un intervalo abierto $(a, b)$ se dice que $f$ es continua en el intervalo $(a, b)$. Análogamente, una función es continua en un intervalo infinito de la forma $(a, \infty)$ o bien $(-\infty, b)$, si es continua en todos los números del intervalo. En seguida, se presenta la definición de una función en un intervalo cerrado.

Sea una función $f$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La función $f$ es continua en $[a, b]$ si lo es en $(a, b)$ y además:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Si una función $f$ tiene un límite por la derecha o por la izquierda, se dice que $f$ es continua en $a$ por la derecha o que $f$ es continua por la izquierda, respectivamente.

**Ejemplo:**

Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ . Trazar la gráfica de $f$ y demostrar que $f$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$

La gráfica de $f(x)$ es la mitad superior de una circunferencia, tal y como se ilustra en la **figura 3.11**.

Si $-3 < a < 3$ entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - a^2} = f(c)$$

De esta manera, se demuestra que $f$ es continua en $a$.

Sólo falta analizar los límites unilaterales en los extremos del intervalo. Como

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(3)$$

$f$ es continua por la derecha en $-3$. Y como también

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(3)$$

$f$ es continua por la izquierda de 3. Esto completa la demostración de que $f$ es continua en $[-3, 3]$

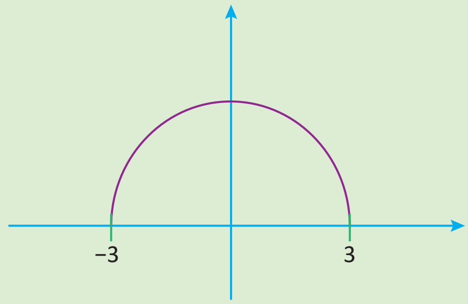



Figura 3.11. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

## Actividad de cierre

Dedicación

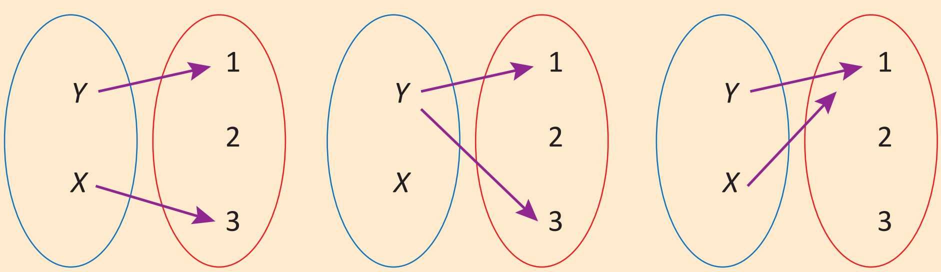
VALORES

TIC

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
| ATRIBUTO | • Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética. |

**1.** De forma individual, comprueba lo que aprendiste en este apartado. Para ello, resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

- Señala cuáles de los siguientes diagramas representan una función. Justifica tu respuesta.




*A* *B* *C*

1) Representa la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2}{x}$

2) Grafica la función $y=\dfrac{4x+1}{2x+1}$

3) Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(-5x+3)}{7x^2-6x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x-4}{x^3-1}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{x^4-x^3+5x^2}$

**2.** Entrega tus resultados al profesor.

NO ABANDONO

## ACTIVIDAD

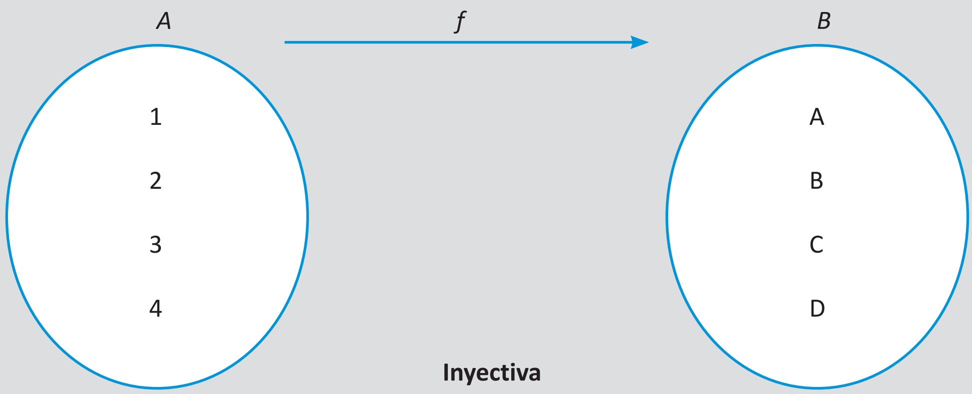
Las personas exitosas saben usar mejor su tiempo porque son disciplinadas y establecen sus metas. Sí, hay tiempo para las vacaciones y para la familia, pero las personas exitosas y creativas logran balancearlo y no tienen momentos improductivos.

Para ser altamente efectivo, necesitas aprender a concentrarte y evitar las cosas que te distraigan (como tus gadgets, los ruidos, las conversaciones en chat, las redes sociales). Probablemente habrá cosas que no disfrutes hacer, pero sabes que las tienes que terminar. Por ello, ser organizado y disciplinado es esencial.

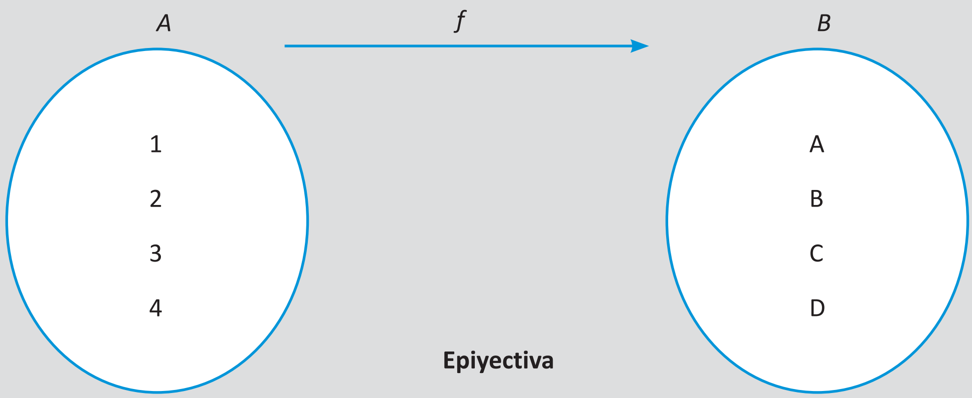
¡Dile no a las distracciones!

**Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 3.1".**

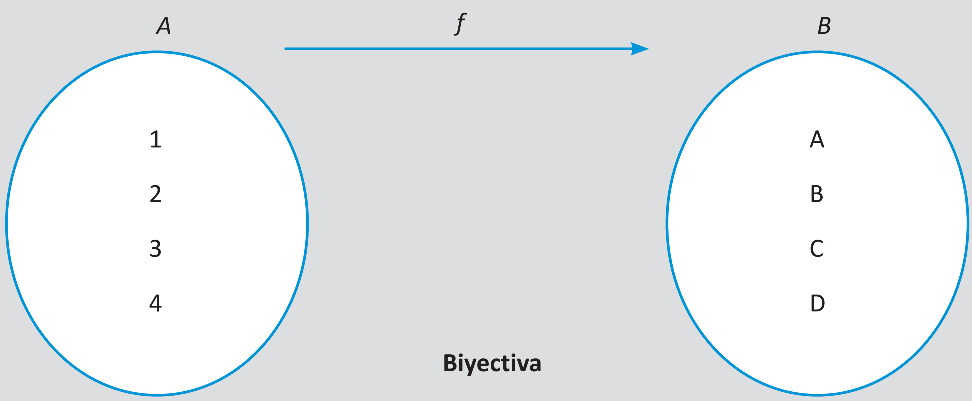
1. Traza las líneas correspondientes para formar el tipo de función solicitada.




**Inyectiva**




**Epiyectiva**




**Biyectiva**

2. Completa la siguiente tabla referente a las propiedades de los límites.

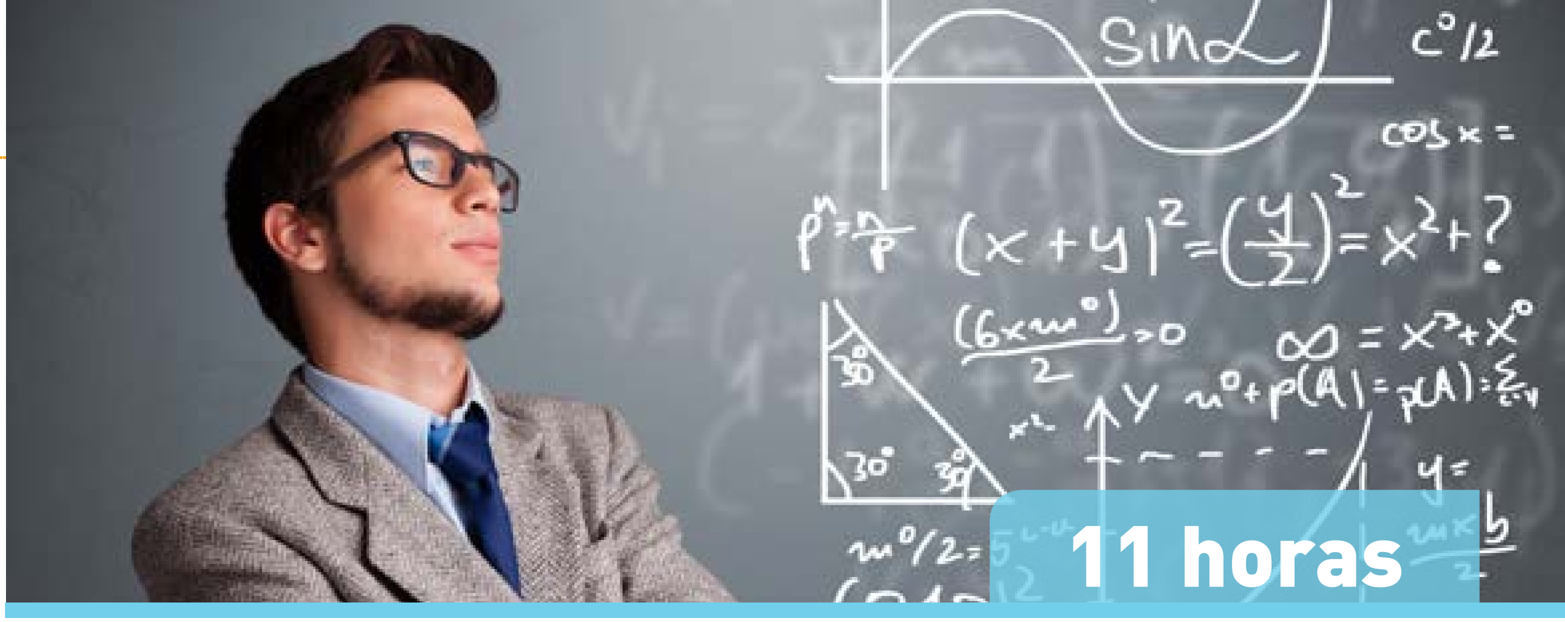
| Propiedades de los límites | Fórmula |
|---|---|
| | $\lim\limits_{x \to a} b = b$ <br> $\lim\limits_{x \to a} x = a$ <br> $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ |
| Suma o diferencia | |
| Producto | |
| | $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(g)}{g(x)}$ |
| Potencia | |
| Límite de una función radical | |

**Realiza tu evaluación parcial.**

1. Según las definiciones vistas en el capítulo, contesta las siguientes preguntas.
   - ¿Cuáles son las características de una función continua? Dibuja una gráfica representativa.

   - ¿Cuáles son las características de una función discontinua? Dibuja una gráfica representativa.

**Valor: 3 puntos**




# 3.2 Representa gráficamente la derivada como un proceso de límite empleando fórmulas de derivación

Para poder entender los resultados del cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada. La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón “instantánea” de cambio.

En este apartado se analizará la representación gráfica de la derivada. Aprenderás cuáles son algunas de las técnicas para derivar funciones y aplicarás estos conocimientos en la solución de problemas.

**NO ABANDONO**

“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo”.
Nelson Mandela

## Manejo de la derivada

### Actividad de inicio

Dedicación — VALORES

TIC

| | |
|---|---|
| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
| ATRIBUTO | • Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. |

1. De forma individual, investiga en fuentes como libros, revistas e internet, algunas de las aplicaciones de la derivada, tanto en las ciencias como en la vida cotidiana.
2. Realiza una mesa redonda con tus compañeros de clase y discutan sobre la investigación que realizaron.

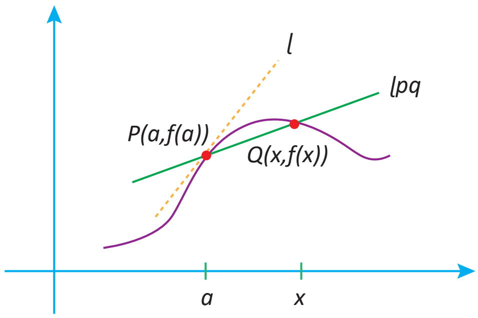



Figura 3.12. Gráfica de la función $f$ y una recta secante $l_{PQ}$.

# Definición

La derivada de una función mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función, según cambie el valor de su variable independiente.

Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto que contiene al número real $a$. En la **figura 3.12** se ilustra la gráfica de $f$ y una recta secante $l_{PQ}$ que pasa por $P(a,f(a))$ y $Q(x,f(x))$. La recta de trazo punteado $l$ representa una posible recta tangente en el punto

La pendiente $m$ de $l$ se define como el valor del límite de la pendiente $l_{PQ}$ cuando $Q$ tiende a $P$. Así:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre y cuando el límite exista. Si se introduce una nueva variable $h$ tal que $x = a + h$ (es decir, $h = x - a$), tal y como se ilustra en la **figura 3.13**, se obtiene la siguiente fórmula para $m$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

equivalente a la primera fórmula. El límite anterior es uno de los conceptos fundamentales del cálculo y se llama **derivada de la función *f* en *a***.

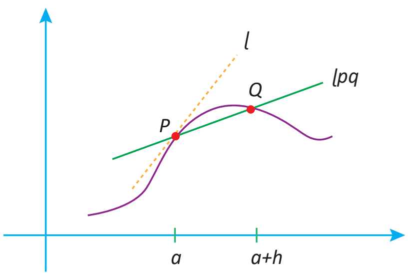



Figura 3.13. Cambio de variable en la gráfica de la función $f$.

Sea $f$ una función definida en el intervalo abierto que contiene a $a$. La derivada de $f$ en $a$, denotada por $f'(a)$, esta dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre y cuando el límite de la función anterior exista.

La fórmula para $f'(a)$ también se puede escribir como sigue:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**Ejemplo:**

Encontrar la pendiente de la gráfica de $f(x) = 2x - 3$ en el punto (2,1).

Para encontrar la pendiente de la gráfica de f cuando $a = 2$, se debe aplicar la definición de la pendiente de una recta tangente como se muestra a continuación:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2(2+h) - 3] - [2(2) - 3]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4 + 2h - 3 - 4 + 3}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} =$$

$$2$$

Así, la pendiente de $f$ en $(a, f(a)) = (2,1)$ es $m = 2$.

El símbolo $f'(a)$ se lee *f prima de a*. La frase "$f'(a)$ existe" significa que el límite en las definiciones anteriores existe. Si $f'(a)$ existe decimos que la función $f$ es derivable en $a$, que es diferenciable en $a$ o que $f$ tiene derivada en $a$.

## Interpretación física y geométrica de la derivada

El uso de la derivada se extiende a casi todas las áreas donde las matemáticas son aplicables. Sin embargo, son dos las áreas en las que más sobresale su uso: la física y la geometría. A continuación, se define la aplicación de la derivada en geometría y física:

- **Recta tangente (geometría):** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$.
- **Velocidad (física):** Si un punto $P$ se mueve a lo largo de una recta coordenada de manera que al tiempo $t$ su coordenada es $s(t)$, entonces su velocidad en el tiempo a es $s'(a)$.

**CURIOSIDADES**

Intervalo abierto: conjunto que sólo contiene los números entre dos números dados (puntos finales), mas no a los puntos finales. Por ejemplo, el intervalo $1 < x < 4$ constituye un intervalo abierto porque no incluye a los puntos finales. El intervalo abierto entre dos números *a* y *b* se escribe $(a,b)$, utilizando paréntesis.

Intervalo cerrado: conjunto que contiene tanto sus puntos extremos como todos los números apropiados. El intervalo $0 \le x \le 4$ es un intervalo cerrado porque están incluidos los dos extremos, 0 y 4. Un intervalo cerrado entre dos números a y b se escribe como $[a,b]$, utilizando corchetes.

**Ejemplo:**

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos (0,1) y (–1,2).

Sea $(a, f(a))$ un punto cualquiera de la gráfica de $f$. La pendiente de la recta tangente se encuentra mediante:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[(a+h)^2+1]-(a^2+1)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2+1-1}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}2a+h=$$

$$2a$$

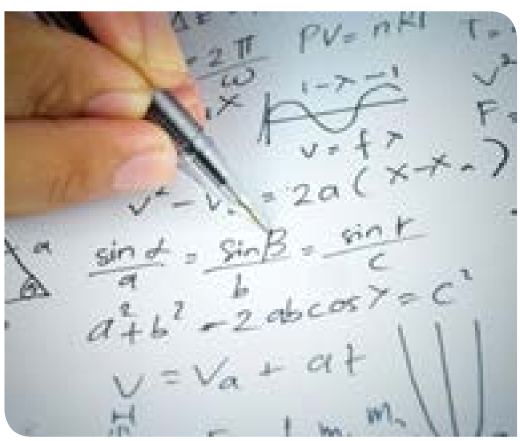
De esta manera, la pendiente en cualquier punto $(a, f(a))$ de la gráfica de $f$ es $m = 2a$. En el punto (0,1) la pendiente es $m = 2(0) = 0$ y en (-1,2), la pendiente es $m = 2(-1) = -2$.

El ejemplo anterior expresa el uso de la derivada en geometría; sin embargo, en secciones posteriores se verán ejemplos del uso de la derivada en la física.

## Cálculo de la derivada a partir de la definición

Una función $f$ es derivable en un intervalo abierto $(a,b)$ si lo es en todos los números c de $(a,b)$. También se considerarán funciones que son derivables en un intervalo infinito $(a,\infty)$ o $(-\infty,\infty)$. Para intervalos cerrados, usamos la siguiente convención: una función $f$ es derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$ si lo es en el intervalo abierto $(a,b)$ y existen los límites:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$



En la definición anterior, los límites por la derecha ($h\to 0^+$) y por la izquierda ($h\to 0^-$) se llaman derivada por la derecha y derivada por la izquierda de $f$ en $a$ y $b$, respectivamente. Para la derivada por la derecha se tiene que $h \to 0^+$ y $a + h$ tiende a $a$ por la derecha. Para la derivada por la izquierda se tiene que $h \to 0^-$ y $b + h$ tiende a $b$ por la izquierda.

**CURIOSIDADES**

Las siguientes son algunas notaciones de la derivada:

$$f'(x),\quad D_x[f(x)],\quad D_x y,$$

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}[f(x)]$$

Todas las notaciones anteriores se utilizan en las matemáticas y sus aplicaciones, y es recomendable familiarizarse con ellas. El subíndice $x$ en el símbolo $D_x$ se utiliza para designar a la variable independiente.

Si $f$ es derivable para todo $x$ en un intervalo, entonces al asociar a cada $x$ el número $f'(x)$ se obtiene una función $f'$ llamada **derivada de *f***. El valor de $f'$ en $x$ está dado por el siguiente límite:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+h)-f(x)}{h}$$

Es importante notar que el número $x$ es fijo pero arbitrario y el límite se toma haciendo tender a $h$ a cero. Entonces, derivar $f(x)$ o encontrar la derivada de $f(x)$ significa determinar $f'(x)$.

**Ejemplo:**

Sea $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. Encontrar:

1. $f'(x)$
2. El dominio de $f'$
3. $f'(2)$, $f'\left(-\sqrt{2}\right)$ y $f'(a)$
4. Una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $P(2,f(2))$.

Para el caso (1) tenemos que:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2-5(x+h)+4]-(3x^2-5x+4)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4)(3x^2-5x+4)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^{2-}5h}{h}=\lim_{h\to 0}6x+3-5=$$

$$6x-5$$

Para el punto (2), dado que $f'(x) = 6x - 5$, la derivada existe para todo número real $x$. Por lo tanto el dominio de $f'$ es $\mathbb{R}$.

Para el ejercicio (3) se sustituye $x$ en $f'(x) = 6x - 5$:

$$f'(2)=6(2)-5=7$$

$$f'\left(-\sqrt{2}\right)-5=-\left(6\sqrt{2}+5\right)$$

$$f'(a)=6a-5$$

Finalmente, para (4), como $f(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 4 = 12 - 10 + 4 = 6$, el punto $P(2,f(2))$ en la gráfica de $f$ tiene coordenadas (2,6). Como se vio en las aplicaciones de la derivada, la pendiente de la recta tangente en $P$ es $f'(2) = 7$. Usando la forma de la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente, se obtiene la siguiente ecuación para la recta tangente en $P$.

$$y - 6 = 7(x - 2)$$

De manera equivalente:

$$7x - y - 8 = 0$$

## Actividad de desarrollo

Reflexión

VALORES

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.<br>• **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. |

1. En pareja, pongan en práctica lo aprendido hasta el momento. Para ello, resuelvan los siguientes ejercicios en su cuaderno.
   1) Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la función: $f(x) = x^2 + 4$
   2) Graficar la función anterior.
   3) Encontrar la pendiente de $f(x) = 4x^2 + 3$ en el punto $T(2, 5)$.
2. Comparen sus resultados con otra pareja y entreguen sus resultados al profesor.

# Aplicación de teoremas de derivación

En esta sección, se verán algunas reglas de derivación. Entre estas reglas se encuentran las de suma, producto y cociente de funciones. Igualmente, se abordará la derivación de funciones con potencias y la solución a problemas básicos con derivadas.

Las reglas de derivación permiten encontrar un resultado de manera directa, esto es, sin necesidad de calcular los límites. El siguiente teorema ilustra la derivada más sencilla, la derivada de una constante.

**TEOREMA 3.3:** La derivada de una función constante es cero. Esto es:

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

El término $c$ indica que se está hablando de una constante.

**Ejemplo:**

| Función | Derivada |
|---|---|
| $y = 7$ | $\frac{dy}{dx} = 0$ |
| $f(x) = 0$ | $f'(x) = 0$ |
| $s(t) = -3$ | $s'(t) = 0$ |
| $y = k\pi^2$, $k$ es constante | $y' = 0$ |

De manera similar al caso de las constantes, la derivada de una variable de grado 1 siempre es 1. En otras palabras:

$$D_x(x) = 1$$

Supongamos que $f(x) = x$ para todo $x$; entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Esta regla es congruente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es 1.

## Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones

A continuación, se presentan las propiedades algebraicas aplicables en la derivada.

**TEOREMA 3.4:** La suma (o la diferencia) de dos funciones derivables $f$ y $g$ es derivable también. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de $f$ y $g$.

- (suma) $D_x[f(x)+g(x)]=D_x[f(x)]+D_x[g(x)]$
- (diferencia) $D_x[f(x)-g(x)]D_x[f(x)]-D_x[g(x)]$

**Ejemplo:**

Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Solución:

$$f'(x)=D_x(2x^4-5x^3+x^2-4x+1)=$$
$$D_x(2x^4-D_x(5x^3)+D_x(x^2)-D_x(4x)+D_x(1)=$$
$$8x^3-15x^2+2x-4$$

La función del ejemplo anterior es un polinomio y como un polinomio es una suma de términos de la forma $cx^n$, donde $c$ es un número real y $n$ un entero no negativo, por lo que pueden utilizarse los resultados sobre derivadas de sumas y diferencias para evaluar la derivada.

### Actividad de desarrollo

Reflexión

VALORES

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.<br>• **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. |

**1.** En pareja, pongan en práctica lo que han aprendido. Para ello, resuelvan los siguientes ejercicios.

1) Calculen la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(t) = 6t^3 - 5t^2 + t + 9$

b) $f(x) = (4x)6 - 3x^4 + 12$

c) $f(w) = -4(0.5w)^2 + 30w$

2) Analicen el siguiente problema: se lanza una pelota verticalmente desde el suelo, con una velocidad inicial de 30 m/s. ¿Cuál es la velocidad en 2 s? Propongan un método para poder encontrar la solución.

**2.** Finalmente, entreguen sus respuestas al profesor.

Continuando con las reglas algebraicas, a continuación se verá la regla del producto.

**TEOREMA 3.5:** El producto de dos funciones derivables *f* y *g* es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}\, f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En términos generales, la derivada del producto de dos funciones no está dada por el producto de sus derivadas.

Visita la siguiente página para encontrar información, videos y animaciones que te ayudarán a reforzar tus conocimientos sobre el cálculo de la derivada.

http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.1_Un100/indice.html

**Ejemplo 1:**

Encontrar la derivada de $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

$$h'(x) = (3x - 2x^2)\frac{d}{dx}\left[5 + 4x\right] + (5 + 4x)\frac{d}{dx}\left[3x - 2x^2\right] =$$
$$(3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x) =$$
$$(12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2) =$$
$$-24x^2 + 4x + 15$$

**Ejemplo 2:**

Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$

Usando la regla del producto:

$$f(x) = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5) + (2x^2 + 8x - 5)D_x(x^3 + 1) =$$
$$(x^3 + 1)(4x + 8) + (2x^2 + 8x - 5)(3x^2) =$$
$$(4x^4 + 8x^3 + 4x + 8) + (6x^4 + 24x^3 - 15x^2) =$$
$$10x^4 + 32x^3 - 15x^2 + 4x + 8$$

## Actividad de desarrollo

Laboriosidad

VALORES

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. |

1. De forma individual practica lo que has aprendido sobre las derivadas. Para ello, calcula la derivada de las siguientes funciones en tu cuaderno.

   1) $f(t) = t^2(3t^5 + 5t^2 + 3)$

   2) $f(w) = (6w^2 + 2)(2x^4 - 3x^2 + 3)$

   3) $f(x) = (2x^4 + 3x - 2)(x^3 + 5x^2 - 6x + 10)$

   4) $f(v) = (27v + 3)^2$

2. Compara tus respuestas con un compañero, corrige de ser necesario y entrega tus resultados al profesor.

TIC

En el video "Aprendiendo a derivar desde cero" podrás observar cómo se ponen en práctica algunos de los métodos para el cálculo de la derivada.

https://www.youtube.com/watch?v=KFxryrwKm0c&list=PLC-j4ScU0ZarxN5aVxeitk3YRZ1QtK98l

A continuación, se presenta la regla del cociente.

**TEOREMA 3.6:** El cociente $\frac{f}{g}$ de dos funciones derivables $f$ y $g$ es derivable para todos los valores de $x$ para los que $g(x)\neq 0$. Además, la derivada de $\frac{f}{g}$ se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^{2}},\qquad g(x)\neq 0$$

**Ejemplo 1:**

Encontrar la derivada de $y=\frac{5x-2}{x^2+1}$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5x-2}{x^2+1}\right]=\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}\left[5x-2\right]-(5x-2)\frac{d}{dx}\left[x^2+1\right]}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{(x^2+1)(5)-(5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{(5x^2+5)-(10x^2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

**Ejemplo 2:**

Calcular $\frac{dy}{dx}$ para $y=\frac{3x^2-x+2}{4x^2+5}$

Por la regla del cociente

$$\frac{d}{dx}=\frac{(4x^2+5)Dx(3x^2-x+2)-(3x^2-x+2)D_x(4x^2+5)}{(4x^2+5)}=$$

$$\frac{(4x^2+5)(6x-1)-(3x^2-x+2)(8x)}{(4x^2+5)^2}=$$

$$\frac{(24x^3-4x^2+30x-5)-(24x^3-8x^2+16x)}{(4x^2+5)^2}=$$

$$\frac{4x^2+14x-5}{(4x^2+5)^2}$$

CURIOSIDADES

Cuando Leibniz elaboró originalmente una fórmula para la regla del producto, lo hizo motivado por la expresión:

$(x + dx)(y + dy) - xy$

De la cual restó $dxdy$ (considerándolos insignificantes) y calculando la forma diferencial $x\,dy+y\,dx$. Esta derivación tuvo como resultado la forma tradicional de la regla del producto.

## Actividad de desarrollo

Responsabilidad — VALORES

| COMPETENCIAS | • **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.<br>• **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. |
|---|---|
| ATRIBUTO | • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. |

**1.** De forma individual, pon en práctica lo que has aprendido. Para ello, calcula la derivada de las siguientes funciones en tu cuaderno.

1) $y=\frac{x^2-1}{2x-5}$

2) $y=\dfrac{3t^3-2t+1}{4t-1}$

3) $y=\dfrac{5x^4-2x^2+10}{3x^2+2x-2}$

4) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

**2.** Entrega tus respuestas al profesor.

# Derivada de una función a una potencia

Antes de enunciar la regla de la potencia es importante revisar el proceso de desarrollo de un binomio:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

El desarrollo general del binomio para un entero positivo $n$ cualquiera es:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\ldots+nab^{n-1}+b^n$$

donde $a$ y $b$ son números reales, $n$ es un entero positivos y:

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots1}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Este desarrollo del binomio se va a utilizar para demostrar un caso especial de la regla de las potencias.

**TEOREMA 3.7:** Si $n$ es un entero positivo, entonces la función $f(x)=x^n$ es derivable y $\dfrac{d}{dx}\left[x^n\right]=nx^{n-1}$

Para que $f$ sea derivable en $x=0$, n debe ser un número tal que $x^{(n-1)}$ se encuentre definido en un intervalo que contenga a 0.

**Ejemplo 1:**

| Función | Derivada |
|---|---|
| $f(x)=x^3$ | $f'(x)=3x^2$ |
| $g(x)=\sqrt[3]{x}$ | $g'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{3}}\right]=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ |
| $y=\dfrac{1}{x^2}$ | $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[x^{-2}\right]=(-2)x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$ |

Es importante tomar en cuenta el ejemplo $y=\dfrac{1}{x^2}$, pues antes de derivar se ha reescrito $\frac{1}{x^2}$ como $x^{(-2)}$. En muchos problemas de derivación, el primer paso consiste en reescribir la función.

NO ABANDONO

"Solo hay un bien, el conocimiento; sólo hay un mal, la ignorancia".
Sócrates

**Ejemplo 2:**

Calcular la pendiente de la gráfica de $f(x) = x^4$ cuando: I) $x = -1$, II) $x = 0$ y III) $x = 1$.

La pendiente de una gráfica en un punto es igual a la derivada en dicho punto. Entonces, la derivada de $f$ es $f'(x) = 4x^3$.

- Para $x = -1$, la pendiente es $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$
- Para $x = 0$, la pendiente es $f'(0) = 4(0)^3 = 0$
- Para $x = 1$, la pendiente es $f'(1) = 4(1)^3 = 4$

A continuación se presenta un teorema que relaciona el uso de constantes en funciones derivables.

**TEOREMA 3.8:** Si $f$ es una función derivable y $c$ un número real, entonces $cf$ también es derivable y $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

Este teorema establece que las constantes pueden ser extraídas de la derivada, incluso cuando aparecen en un denominador.

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c}f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{c}\frac{d}{dx}[f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x)$$

**Ejemplo 3:**

| Función | Derivada |
|---|---|
| $y = \frac{2}{x}$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2x^{-1}][2x^{-1}] = 2\frac{d}{dx}[x^{-1}] = 2(-1)x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$ |
| $f(t) = \frac{4t^2}{5}$ | $f'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{5}t^2\right] = \frac{4}{5}\frac{d}{dt}[t^2] = \frac{4}{5}(2t) = \frac{8}{5}t$ |
| $y = 2\sqrt{x}$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[2x^{-\frac{1}{2}}\right] = 2\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ |

La regla del múltiplo constante y la de las potencias se pueden combinar en una sola. Esta regla es:

$$Dx[cx^n] = cnx^{n-1}$$

# Solución de problemas básicos con derivadas

La derivada también se utiliza para determinar el ritmo de cambio de una variable respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones; por citar algunos, los ritmos de crecimiento de población, los ritmos de producción, los de flujo de un líquido, de la velocidad y de la aceleración.

Un uso frecuente de los ritmos de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. La posición de tal línea puede ser horizontal o vertical y el movimiento puede ser positivo (hacia la derecha) o negativo (hacia la izquierda).

La función $s$ que representa la posición (con respecto al origen) de un objeto como función del tiempo $t$ se denomina **función de posición**. Si durante cierto lapso $\Delta t$ el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces:

$$\text{razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

La velocidad media es:

$$\frac{\text{cambio de distancia}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

La función anterior se le conoce como **tasa (o razón) media de variación**.

**Ejemplo 1:**

Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 metros, su altura *s* en el instante *t* se representa mediante la función de posición:

$$s = -16t^2 + 100$$

donde *s* se mide en metros y *t* en segundos. Encontrar su velocidad media para cada uno de los siguientes intervalos:

a) [1,2]

b) [1,1.5]

c) [1,1.1]

Para el caso a), el objeto cae desde una altura $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ metros hasta una altura de $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ metros. La velocidad media es:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36-84}{2-1} = -48 \text{ metros por segundo}$$

Para el caso b), el objeto cae desde una altura de 84 metros hasta una altura de 64 metros. La velocidad media es:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64-84}{1.5-1} = -\frac{20}{0.5} = -40 \text{ metros por segundo}$$

Finalmente, para el caso c) el objeto cae desde una altura de 84 metros hasta una altura de 80.64 metros. La velocidad media es:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80.64-84}{1.1-1} = -\frac{-3.36}{0.1} = -33.6 \text{ metros por segundo}$$

Dado que las velocidades calculadas son negativas, esto quiere decir que el movimiento del objeto es hacia abajo.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante *t* es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

En otras palabras, la función **velocidad** es la derivada de la función posición. A la función anterior también se le conoce como **tasa (o razón) de variación**. La velocidad puede ser positiva, negativa o nula. La **rapidez** de un objeto puede definirse como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.

TIC

Para reforzar tus conocimientos ingresa en la siguiente página en donde encontrarás ejercicios que podrás resolver.

http://www.ehu.eus/olatzgz/curso%20cero/Derivacion/test.html

**Ejemplo 2:**

En el instante $t = 0$, un saltador se lanza desde un trampolín que está a 32 metros sobre el nivel del agua de la piscina. La posición del saltador está dada por: $s(t) = -16t^2 + 16t + 32$

donde *s* se mide en metros y *t* en segundos.

a) ¿Cuánto tarda el saltador en llegar al agua?

b) ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Para a), se determina el momento en que toca el agua. Hacemos $s = 0$ y se despeja $t$:

$-16t^2 + 16t + 32 = 0$

$-16(t + 1)(t - 2) = 0$

$t = -1$ o $2$

Debido a que la rapidez no puede tener un valor negativo, el saltador llega al agua en $t = 2$ segundos.

Para b), su velocidad en el instante t está dada por la derivada $s'(t) = -32t + 16$. En consecuencia, su velocidad en $t = 2$ es:

$s'(2) = -32(2) + 16 = -48$ metros por segundo.

## Actividad de cierre

Laboriosidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

ATRIBUTO

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

**1.** De forma individual, pon a prueba lo que aprendiste. Para ello, resuelve los siguientes problemas.

1) Desde lo alto de un edificio de 150 m se deja caer una pelota y ésta se desplaza verticalmente hacia el suelo. Después de $t$ segundos la pelota habrá caído una distancia de $s(t) = 4.9t^2$ m.

a) ¿Cuánto tiempo le toma a la pelota tocar el suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota durante el tiempo que cae?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en exactamente 2 s?

2) En un juego de beisbol uno de los jugadores lanza una pelota a otro jugador con una velocidad inicial de 80 m/seg. Si consideramos que la altura a la que se lanza la pelota es cero, la función que describe la trayectoria de la pelota es: $s(t) = 80t - 4.9t^2$

a) ¿Cuál es la velocidad y la aceleración de la pelota cuando han transcurrido $t$ segundos?

b) ¿A partir de qué momento la pelota empieza a bajar?

**2.** Entrega tus resultados al profesor.

NO ABANDONO

"Un líder es alguien que conoce el camino, lo recorre y lo muestra",

John C.Maxwell

**Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 3.2" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.**

1. Asocia con una línea la columna de la izquierda con la columna de la derecha de tal forma que el concepto de la izquierda concuerde con el de la derecha.

| | |
|---|---|
| La derivada de una función mide | la rapidez de cambio con respecto a una variable independiente. |
| $f'(a)$ se lee como | una función que satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes son a su vez polinomios o monomios. |
| Son las formas en que se puede representar una derivada | $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ |
| La función *s* que representa la posición (con respecto al origen) de un objeto como función del tiempo *t* se denomina | función de posición |
| Tasa media de variación | $f'(x),\ D_x[f(x)],\ D_x y,\ y'=\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{dy}{dx}[f(x)]$ |
| Tasa de variación | $v(t)=s'(t)$ |
| Una función algebraica es | *f* prima de *a* |
| Una función es | la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. |

**Realiza tu evaluación parcial.**

1. Completa la siguiente tabla con las fórmulas de cada regla de la derivada.

| Regla de la derivada | Fórmula |
|---|---|
| Constante | |
| Potencia | |
| Múltiplo constante | |
| Suma y diferencia | |
| Producto | |
| Cociente | |

**Valor: 5 puntos**

# Actividad de evaluación 3.2.1

Dedicación

VALORES

EVALUACIÓN

TIC

RÚBRICA

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

ATRIBUTO

- Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

**1.** De manera individual, representa gráficamente la derivada de una función aplicada en la solución de problemas cotidianos, empleando su definición matemática y los teoremas fundamentales para su obtención, para ello haz lo siguiente:

**2.** Límites de funciones

1) Encuentra: la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $p(a, f(a))$ y la ecuación de la recta tangente en el punto $p(2, f(2))$ para las siguientes funciones.

a) $f(x)=3-2x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=x^4$

2) Para cada uno de los siguientes ejercicios aplica alguno de los teoremas vistos, y, si es que existe, el límite:

a) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^3-2x+7)$

b) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)(x-4)$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{x^2-5x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 7} 0$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-6x+3}{16x^3+8x-7}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(4t^2+5t-3)}{(6t+5)^4}$

3) Sea $R$ el rectángulo que une los puntos medios de los lados del cuadrilátero $Q$, el cual tiene vértices $(\pm x, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Calcula:

$$\lim_{n\to 0^+}\frac{\text{perímetro } R}{\text{perímetro } Q}$$

4) La teoría de la relatividad de Einstein dice que la masa $m(v)$ de un objeto está relacionada con su velocidad $v$ por medio de:

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

donde $m_0$ es la masa en reposo y $c$ es la velocidad de la luz. ¿Qué representa $\lim\limits_{v\to c} m(v)$ ?

5) Describe por escrito el procedimiento realizado para la obtención de la solución de cada uno de los ejercicios anteriores.

**3.** Continuidad de funciones

1) Una liga estirada cubre el intervalo $[0,1]$. La liga se suelta y se contrae de modo que cubre el intervalo $[a,b]$ con $a \geq 0$ y $b \leq 1$. Demuestra que esto resulta en un punto de la liga ubicado en la posición original.

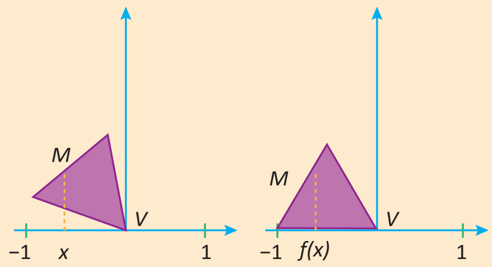
2) Iniciando a las 4 a.m., un excursionista escala en forma lenta hacia la cima de una montaña, llegando a ella al medio día. Al día siguiente regresa a lo largo de la misma ruta iniciando a las 5 a.m. para llegar al pie de la montaña a las 11 a.m. Demuestra que en algún punto a lo largo de la ruta su reloj mostraba la misma hora en ambos días.

3) Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 tiene su cara en la vertical del plano $xy$, con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de $V$ hasta que un lado golpee el piso en el eje $x$ (ver figura). Denota con $M$ la abscisa inicial del punto medio $M$, del lado opuesto a $V$, y con $f(x)$ la abscisa $x$ final de este punto. Considera que el bloque queda en equilibrio cuando $M$ está directamente arriba de $V$.

a) Determina el rango y el dominio de $f$.

b) En el dominio de $f$, ¿en dónde es discontinua?

c) Identifica los puntos fijos de $f$.




4) Plantea un problema en donde se aplique la continuidad de funciones para la obtención de la solución.

**4.** Aplicaciones de las derivadas.

1) Encuentra la derivada de $y = x^5$, empleando teoremas de derivación.

2) Halla la derivada de $y = 6x^3 - 3x^2 - 10$.

3) Calcula la derivada de $g(x) = (-7x + 3)(x^2 - 2)$.

4) Determina la derivada de $f(x) = (x + 3)(x^2 + 2)$.

5) Encuentra la derivada de $y = \left(\frac{2x+1}{3x-4}\right)^4$.

6) Halla la derivada de $y = (x^2 + 4)^4(2x^3 - 1)^3$.

7) Realiza una presentación en dispositivas en donde muestres el procedimiento para la solución de un problema de tu entorno, haciendo uso del concepto de derivada.

8) Un objeto viaja a lo largo de una línea recta de modo que su posición $s$ es $s(t) = t^2 + 1$ metros después de $t$ segundos.

a) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 3$?

b) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2.003$?

c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2 + h$?

d) Determina su velocidad instantánea en $t = 2$.

9) Considera que un objeto se desplaza a lo largo de un eje coordenado de modo que su distancia dirigida, medida desde el origen, después de $t$ segundos es $\sqrt{2t+1}$ metros.

a) Encuentra su velocidad instantánea en $t = \alpha$, $\alpha > 0$.

b) ¿Cuándo alcanzará una velocidad de $\frac{1}{2}$ metro por segundo?

10) Realiza una presentación en dispositivas en donde muestres el procedimiento para la solución de un problema de tu entorno, aplicando la derivada.

**5.** Pasa en limpio el trabajo realizado de los puntos 2, 3 y 4 de esta actividad, no olvides incluir su respectivo título. Incluye también los procedimientos y métodos aplicados, junto con los resultados que obtuviste paso por paso. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha, número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.

**6.** Antes de entregar tus resultados a tu profesor, realiza la Rúbrica 3.2.1, de tu "Autoevaluación" que se encuentra al final de esta unidad en la sección "Instrumentos de evaluación". Revisa si cumples con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de presentarlo.

**7.** Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza.

**Contesta los reactivos que se presentan a continuación, rellenando completamente el óvalo de la respuesta correcta.**

1. Sean $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ y $a \neq 0$ obtener $f'(x)$.

   (a) $f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

   (b) $f'(x)=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

   (c) $f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}}$

   (d) $f'(x)=\frac{1}{x}$

2. Sea $f'(x)=\frac{|x|}{x}$, ¿cuál es el límite de $f(x)$?

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

   (b) $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

   (d) El límite no existe.

3. Calcular el límite de $\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}$

   (a) $\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}=\frac{7}{12}$

   (b) $\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}=\frac{10}{17}$

   (c) $\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}=\frac{11}{7}$

   (d) $\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}=\frac{9}{17}$

4. Hallar la derivada de $g(x)=\frac{1}{w^4}$

   (a) $g'(x)=\frac{4}{w^5}$

   (b) $g'(x)=\frac{4}{w^4}$

   (c) $g'(x)=-\frac{4}{w^5}$

   (d) $g'(x)=\frac{5}{w^5}$

5. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 120 m/s. Su altura sobre el suelo $t$ segundos después está dada por $s(t)=-4.9t^2+120t$. ¿Qué tiempo tardará el proyectil en caer al suelo?

   (a) 24.5 segundos

   (b) 12.5 segundos

   (c) 5 segundos

   (d) 120 segundos

6. Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-2x+1}{4x^3-7}$

ⓐ El límite no existe.

ⓑ 0

ⓒ $\dfrac{39}{101}$

ⓓ $\dfrac{40}{101}$

7. Calcular la derivada de $y=6x^3-7x^2-9x+12$

ⓐ $y'=18x^2-14x-9$

ⓑ $y'=18x^3-14x^2-9x$

ⓒ $y'=18x^3-14x^2-9x+12$

ⓓ $y'=2x^2-3.5x^2-9$

8. Calcular la derivada de $y=\dfrac{3x^2}{5}+\dfrac{7x}{4}$

ⓐ $y'=\dfrac{1x}{5}+\dfrac{7}{4}$

ⓑ $y'=\dfrac{6x^2}{5}+\dfrac{7x}{4}$

ⓒ $y'=\dfrac{6x}{5}+\dfrac{7}{4}$

ⓓ $y'=\dfrac{6}{5}$

9. Hallar la derivada de $y=\dfrac{1}{x}$

ⓐ $y'=\dfrac{1}{x^2}$

ⓑ $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

ⓒ $y'=\dfrac{2}{x^2}$

ⓓ $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

10. Hallar la derivada de $y=\dfrac{3}{x^2}$

ⓐ $\dfrac{6}{x}$

ⓑ $\dfrac{6}{x^3}$

ⓒ $-\dfrac{3}{x^3}$

ⓓ $-\dfrac{6}{x^3}$

# Autoevaluación

Evalúa los indicadores de aprendizaje de cada actividad de evaluación parcial para conocer la calificación que estás en posibilidad de obtener en la rúbrica según tu desempeño. Marca una √ en cada indicador logrado.
Para obtener Suficiente, deberás cubrir todos los indicadores del tono más claro, y para lograr Excelente, todos los indicadores de ambos tonos.

Suficiente | Excelente

| Rúbrica 3.2.1 | | |
|---|---|---|
| **Módulo:** Representación gráfica de funciones. | **Grupo:** | |
| **Nombre del alumno:** | **Fecha:** | |
| **Resultado de aprendizaje (R.A.):** 3.2. Representa gráficamente la derivada como un proceso de límite empleando fórmulas de derivación. | **Actividad de evaluación:** 3.2.1 Representa gráficamente la derivada de una función aplicada en la solución de problemas cotidianos y los teoremas fundamentales para su obtención. | |
| **Porcentaje** | ✓ | **Indicador logrado** |
| **Límite de funciones** **30%** | | Realicé el cálculo y la representación gráfica para indicar el límite de funciones, tanto en la descripción, el análisis y la solución, sin errores. |
| | | Describí por escrito el procedimiento realizado para la obtención de la solución. |
| **Continuidad de funciones** **30%** | | Realicé el cálculo y la representación gráfica para indicar la continuidad de funciones, tanto en la descripción, el análisis y la solución, sin errores. |
| | | Planteé un problema en donde se aplicó la continuidad de funciones para la obtención de la solución. |
| **Aplicación de la derivada** **35%** | | Realicé el cálculo y la representación gráfica para indicar la derivada de funciones, tanto en la descripción, el análisis y la solución, sin errores. |
| | | Realicé una presentación en diapositivas en donde mostré el procedimiento para la solución de un problema de mi entorno. |
| **Autoevaluación** **5%** | | Analicé críticamente los factores que influyen en mi toma de decisiones. |
| | | Construí hipótesis, y diseñé y apliqué modelos para probar su validez. |
| | | Seguí instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. |
| | | Ordené información según categorías, jerarquías y relaciones. |
| | **100** | |

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el RA 3.2 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

## Heteroevaluación

De acuerdo con el desempeño de sus alumnos, anote el peso logrado en cada actividad realizada. Sume los porcentajes para obtener el peso para la unidad.

<table>
<tr><th colspan="9">Tabla de ponderación</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Unidad</th><th rowspan="2">RA</th><th rowspan="2">Actividad de evaluación</th><th colspan="3">Aspectos a evaluar</th><th rowspan="2">% Peso específico</th><th rowspan="2">% Peso logrado</th><th rowspan="2">% Peso acumulado</th></tr>
<tr><th>C</th><th>P</th><th>A</th></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Represen-tación gráfica de derivadas.</td><td>3.1. Representa gráfica-mente funciones, límites y continuidad mediante su ecuación o elementos que la integran.</td><td rowspan="2">3.2.1</td><td rowspan="2">▲</td><td rowspan="2">▲</td><td rowspan="2">▲</td><td rowspan="2">20</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>3.2 Representa gráfica-mente la derivada como un proceso de límite empleando fórmulas de derivación.</td></tr>
<tr><td colspan="6">% peso para la unidad 3</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Peso total del módulo</td><td>100</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Al término de la última unidad, sume el peso logrado en todas las unidades y obtenga el total del módulo.

# Coevaluación

Trabaja con un compañero para que se evalúen mutuamente. Escribe los datos de tu compañero en la tabla siguiente.

Evalúa los atributos de las competencias genéricas que tu compañero puso en práctica durante esta unidad; para ello, en la tabla indica con una "X" la casilla corresponda.

<table>
<tr><td colspan="5">Nombre de mi compañero:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carrera:</td><td colspan="3">Nombre del módulo:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Semestre:</td><td colspan="3">Grupo:</td></tr>
<tr><th>Competencias genéricas</th><th>Atributos</th><th>Con frecuencia</th><th>Algunas ocasiones</th><th>Nunca</th></tr>
<tr><td colspan="5">Se expresa y comunica</td></tr>
<tr><td>4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.</td><td>Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Piensa crítica y reflexivamente</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.</td><td>Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.</td><td>Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Trabaja en forma colaborativa</td></tr>
<tr><td>8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.</td><td>Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

# Bibliografía

## Libros, revistas y periódicos


- Aguilar, A., F. Bravo, H. Gallegos, M. Cerón y R. Reyes, *Geometría analítica,* Pearson Educación de México, México, 2009.
- Ayres, F., *Teoría y problemas de cálculo diferencial e integral*, McGraw-Hill de México, México, 1971.
- Banach, S., *Cálculo diferencial e integral*, segunda edición, Unión Tipográfica Hispano-Americana, México, 1967.
- de Oteyza, E., E. Lam, E. Gómez, J. A. Ramírez y C. Hernández, *Geometría analítica*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 2004.
- Fuller, G., y D. Tarwater, *Geometría analítica*, séptima edición, Addison- Wesley Iberoamérica, México, 1995.
- Kindle, H., *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio*, McGraw-Hill, México, 1991.
- Larson, R., R. P. Hostetler y B. H. Edwards, *Cálculo con geometría analítica,* octava edición, McGraw-Hill/Interamericana editores, México, 2006.
- Lehmann, C., *Geometría Analítica*, Limusa, México, 1989.
- Piskunov, N., *Cálculo diferencial e integral*, primera edición, Limusa, México, 2009.
- Smith, Stanley A., *et al., Álgebra, trigonometría y geometría analítica,* Pearson Education, México, 1998.
- Swokowski, Earl W., *Cálculo con geometría analítica*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 2000.
- Zill, D. G., y J. M. Dewar, *Álgebra, trigonometría y geometría analítica,* McGraw-Hill Interamericana, México, 2012.


## Páginas web


- Casanova, F. J. Madriaga y J. Gálvez, *Geometría Analítica, Algo de Historia,* <https://es.scribd.com/doc/33516043/Geometria-Analitica-Algo-de-Historia>, consulta: mayo de 2016.
- *Secciones cónicas*, en <http://envigadodspace.colombiaaprende.edu.co/bitstream/4/152/1/SM_M_G09_U02_L05_M,S,A.pdf>, consulta: mayo de 2016.
- *Un poco de historia y el nacimiento del cálculo*, en <http://www.fca.unl.edu.ar/ Intdef/Historia1.htm#Indice>, consulta: mayo de 2016.
- http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas
- http://www.sectormatematica.cl/libros.htm
- http://www.sectormatematica.cl/educmedia.htm
- http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/
- http://www.editorialimpacto.cl/?pag=productos&cod=L007
- http://www.vitutor.com/fun/3/a_1.html
- http://www.vitutor.com/fun/4/derivada.html
- http://experymente.blogspot.mx/p/gadgets-matematicos.html
- http://www.vitutor.com/fun/4/b_r.html
- http://es.slideshare.net/ftorrealba/tablas-de-lmites-y-derivadas

# Notas

# Notas