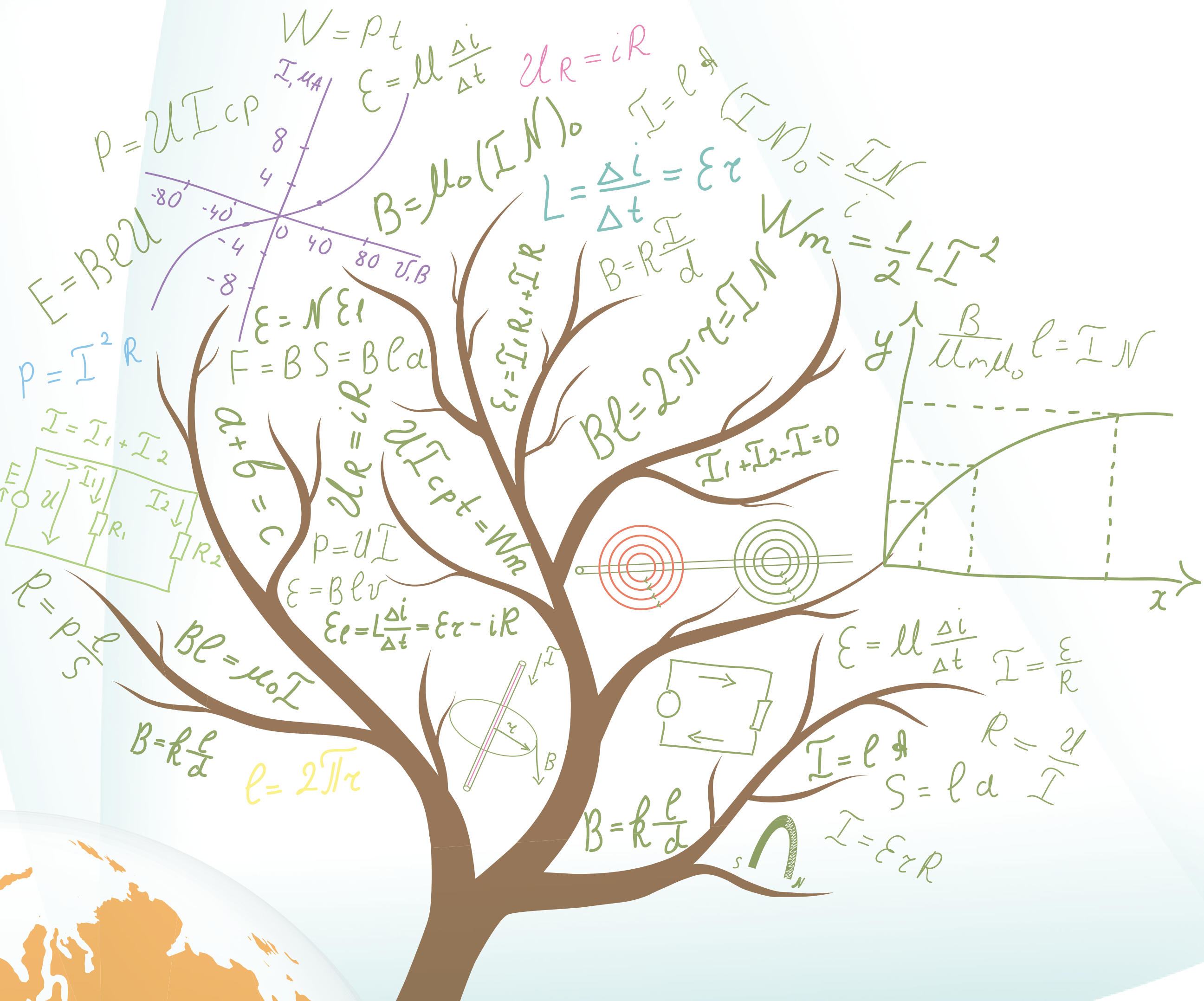
MANEJO DE ESPACIOS
Y CANTIDADES

Carlos Gómez García



www.anglo-digital.com
Anglo Digital SA de CV
Anglo DigitalMx

MANEJO DE ESPACIOS Y CANTIDADES

Primer Semestre

Paseo del Faisán No. 50, Col. Lomas Verdes, 1a. Sección,
C.P. 53120, Naucalpan, Edo. de México.

Edición 2017

ISBN 978-607-615-414-4

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.
Registro No. 3650

Miembro de la Cámara Nacional de Comercio de la Ciudad de México.
Registro No. 13405

Impreso en México/Printed in Mexico

Dirección editorial: Víctor Ricardo Guzmán Zúñiga
Dirección de desarrollo digital: Víctor Fernel Guzmán Arvizu
Direccion de desarrollo editorial: Alberto García Rodríguez
Coordinación editorial: Carmen Sánchez Crespo
Edición: Carmen Sánchez Crespo, Cynthia Patricia Rodríguez Zepeda y Beatriz Angélica Jiménez Gallegos
Corrección de estilo: Alejandro Estrada
Redacción de las secciones “Cultura para la Paz” y “Cultura Financiera y para el Consumo”: Nataschka Vargas Murillo y Cynthia Patricia Rodríguez Zepeda
Diseño de portada: Marisol Rivas
Diagramación: Acela Rocío Cervantes García
Imágenes: Shutterstock,123RF

Se terminó la impresión de esta obra en

Informes:
Anglo publishing
Telefonos: (55) 5343-2542
(771)167-5087

Presentación

El presente libro, *Manejo de espacios y cantidades,* ha sido diseñado de acuerdo con el **Modelo Académico de Calidad para la Competitividad del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (Conalep)**, con la finalidad de orientar el aprendizaje de los alumnos, encauzar sus acciones y reflexiones, y proporcionar situaciones o **experiencias de aprendizaje** en las que desarrollan competencias y sus atributos (entendiendo éstas como la combinación integrada de conocimientos, habilidades, actitudes y valores), que les permitan movilizar, de forma integral, recursos que se consideran indispensables para saber resolver problemas de manera autónoma, flexible y responsable en diversas situaciones o contextos.

Las **actividades en secuencia didáctica por competencias y atributos** que se trabajan en el libro son suficientes para cubrir el 100% de los temas vistos en el programa de estudios, y ponen énfasis en lo que los alumnos tienen que aprender, en las formas en cómo lo hacen y en la aplicación y transferencia de los conocimientos a situaciones de la vida real; ello exige a los estudiantes relacionar, integrar, interpretar, inventar, aplicar y transferir los saberes a la resolución de problemas.

El libro también contiene la sección **"Recapitulación"**, indicada en los programas de estudios Conalep, que sirve a los alumnos para valorar los aprendizajes esperados y aplicar una evaluación parcial, antes de realizar cada una de las **"Actividades de evaluación"** con valor en la calificación, incluidas al 100% en el libro.

Parte sustancial del sistema Conalep es la metodología de su evaluación, cuya finalidad diagnóstica, formativa y sumativa se concreta en los diversos instrumentos de evaluación que contiene este libro: **Evaluación diagnóstica**, **Autoevaluación**, **Coevaluación** y **Heteroevaluación**, además de pruebas tipo Planea, que permitirán a los alumnos prepararse para la aplicación de las pruebas **Planea y Pisa** que realizarán en su último grado escolar.

Como complemento, se integran al libro cápsulas informativas de datos interesantes relacionados con el tema; recomendaciones de **tecnologías de la información y la comunicación**, como páginas web, videos, música, podcast, películas, libros, etc.; actividades y frases que motivan a los alumnos a mejorar y evitar la deserción escolar y fortalecen el **Programa No Abandono**, así como actividades complementarias para el desarrollo de **aprendizajes para la vida**, en los ejes transversales de **"Cultura para la Paz"** y **"Cultura financiera"**.

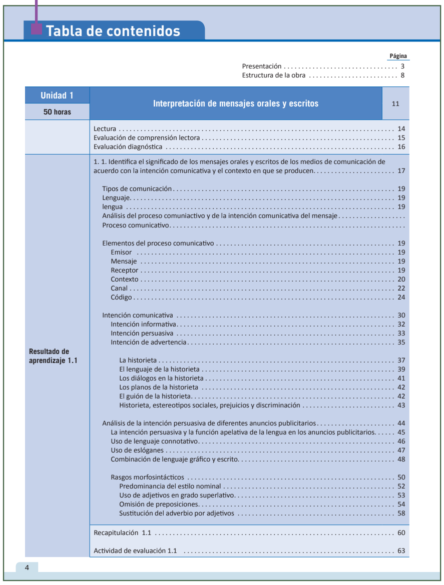
Esperamos que, tanto a profesores como a los alumnos, este libro les sea de utilidad en la transmisión del conocimiento y la comprensión del aprendizaje.

Víctor Guzmán Zúñiga
Dirección Editorial

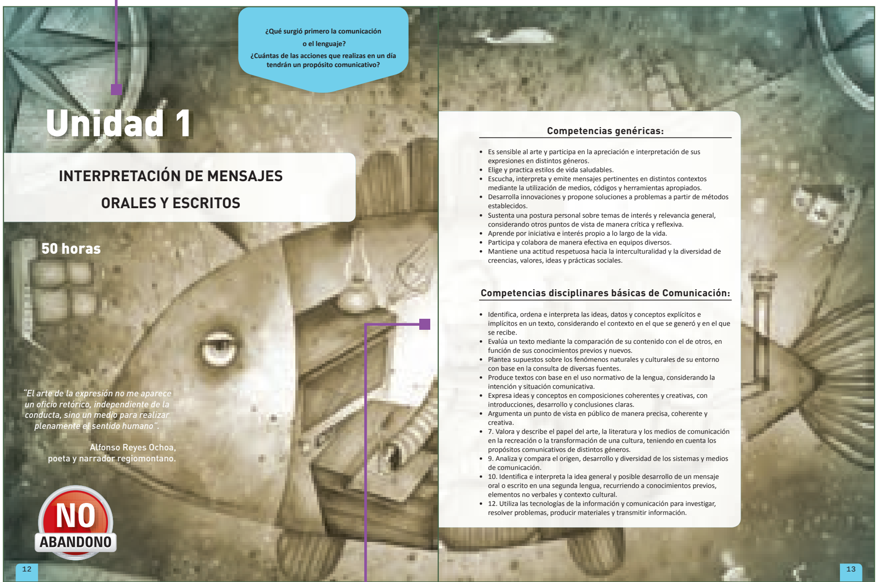
Tabla de contenidos

Estructura de la obra

Tabla de contenidos
Presenta, por medio de cuadros, la organización del contenido de cada unidad del módulo: tema, tiempo asignado, resultados de aprendizaje, subtemas, recapitulación, actividades de evaluación oficiales e instrumentos de evaluación.



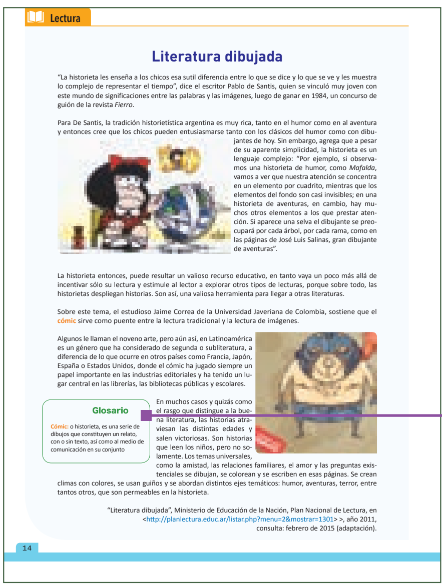
Inicio de unidad
En cada inicio de unidad se presenta una imagen distintiva de la misma; el número identificador, título; una frase relacionada con el contenido que invita a la reflexión, así como preguntas de introducción que sirven para detonar los conocimientos previos con que cuentan los alumnos.



Competencias genéricas y disciplinares
Al inicio de cada unidad se presentan todas las que se trabajaron a lo largo de ésta, tanto en actividades formativas como de evaluación.

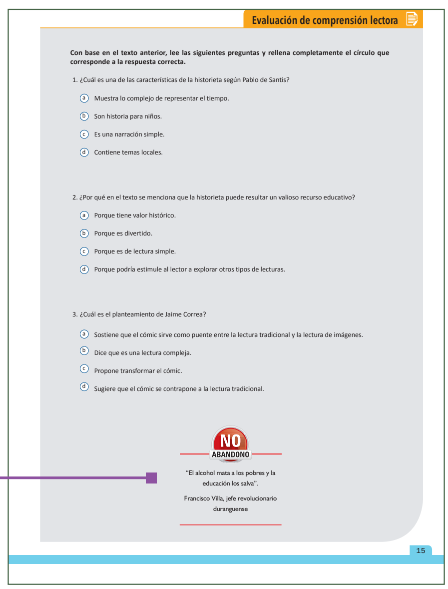
Lectura
Su finalidad es acercar al estudiante al contenido del tema que aprenderá, mediante un texto literario para crear un puente de conexión entre ambas disciplinas; con este motivo, se localiza al inicio de cada unidad.

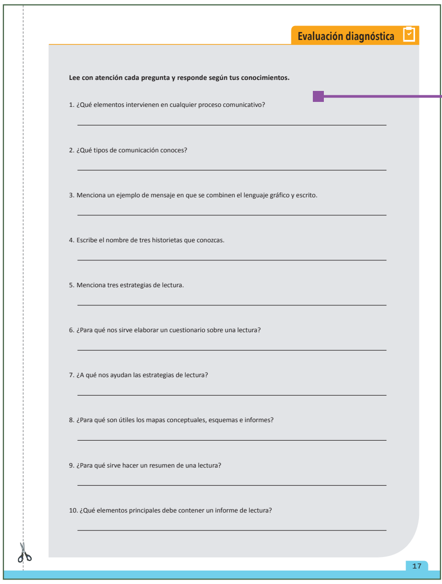
Evaluación de comprensión lectora
Es la primer actividad de cada unidad. Sirve para verificar lo que los alumnos comprendieron de la lectura que hicieron en la página anterior.



Glosario
Esta sección ayuda al alumno a conocer el significado de palabras que no son de su dominio.

No abandono
Esta cápsula invita a realizar una reflexión o actividad acerca de la importancia de ser constantes y perseverantes en los estudios.





Evaluación diagnóstica

Lee con atención cada pregunta y responde según tus conocimientos.

1. ¿Qué elementos intervienen en cualquier proceso comunicativo?
2. ¿Qué tipos de comunicación conoces?
3. Menciona un ejemplo de mensaje en que se combinen el lenguaje gráfico y escrito.
4. Escribe el nombre de tres historietas que conozcas.
5. Menciona tres estrategias de lectura.
6. ¿Para qué nos sirve elaborar un cuestionario sobre una lectura?
7. ¿A qué nos ayudan las estrategias de lectura?
8. ¿Para qué son útiles los mapas conceptuales, esquemas e informes?
9. ¿Para qué sirve hacer un resumen de una lectura?
10. ¿Qué elementos principales debe contener un informe de lectura?

17

Evaluación diagnóstica
Permite al profesor identificar si los alumnos cuentan con los conocimientos básicos necesarios para iniciar los temas de la unidad.

TIC
Recomendaciones de páginas de internet que amplían el conocimiento; o de otro tipo de Tecnologías de la Información y la Comunicación, como videos, películas, programas de Word, Excel, PowerPoint, podcast y libros, entre otros.

Actividad de desarrollo

Responsabilidad

VALORES

COMPETENCIAS

ATRIBUTO

1. De acuerdo con la distancia mostrada en las viñetas de la página anterior, escribe debajo, o a un lado, de cada una el tipo de plano que representan.
2. Comparte tus resultados con tus compañeros de grupo.

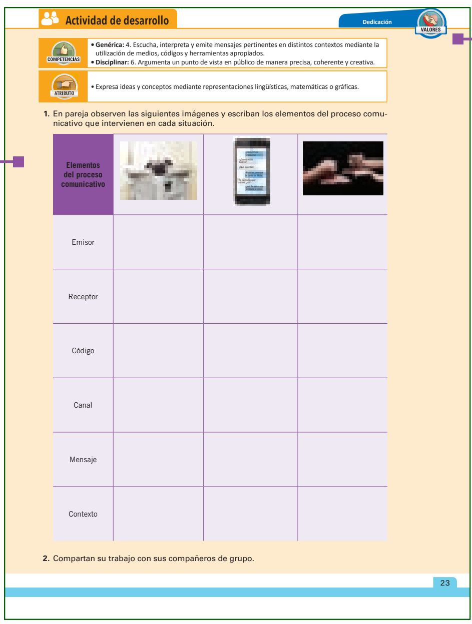
El guión de la historieta

TIC

31

Actividades formativas
Tienen la finalidad de que el alumno ponga el práctica lo aprendido y logre extrapolar ese conocimiento teórico a su vida contidiana. En ellas se trabajan competencias disciplinares, así como genéricas y sus atributos. En cada Resultado de Aprendizaje, están organizadas en secuencia didáctica de: inicio, desarrollo y cierre. Además cada una indica la forma de trabajo: individual, pareja, equipo o en grupo.

Valores
Referidos en las actividades, se trabajan durante toda la clase y en todas las asignaturas.



Actividad de desarrollo

Dedicación

VALORES

COMPETENCIAS

ATRIBUTO

1. En pareja observen las siguientes imágenes y escriban los elementos del proceso comunicativo que intervienen en cada situación.

Elementos del proceso comunicativo			
Emisor			
Receptor			
Código			
Canal			
Mensaje			
Contexto			

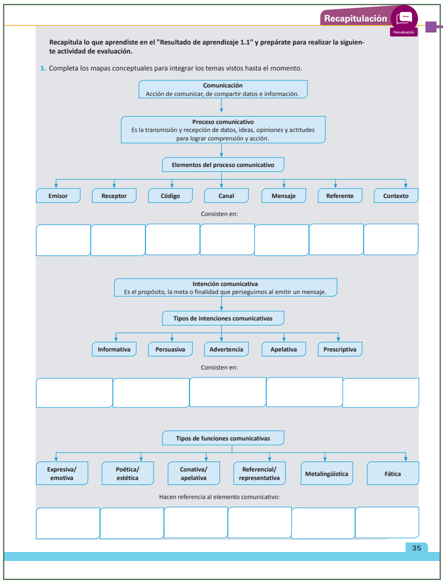
2. Compartan su trabajo con sus compañeros de grupo.

23

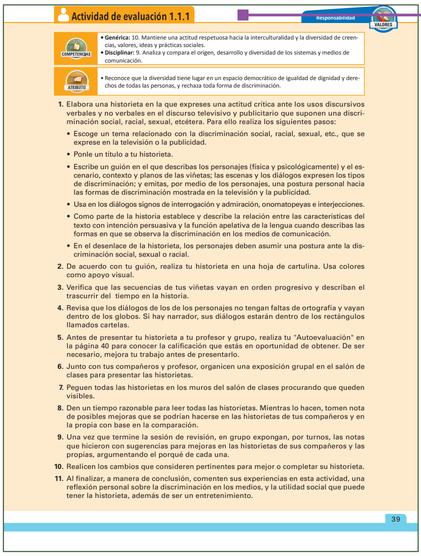
Lenguaje

20

Curiosidades
Son breves textos informativos sobre algo relacionado con los temas de la unidad, que complentan y enriquecen datos de los autores o sucesos que se tratan.

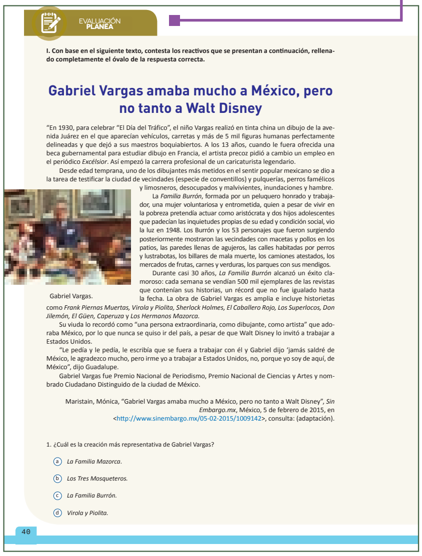


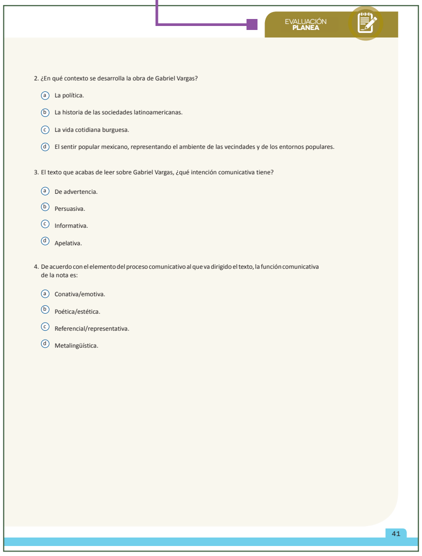
Recapitulación
Esta sección aparece antes de cada actividad de evaluación. Consta de un breve resumen, esquema o mapa conceptual o semántico y se acompaña de preguntas que sirven para valorar los aprendizajes esperados.

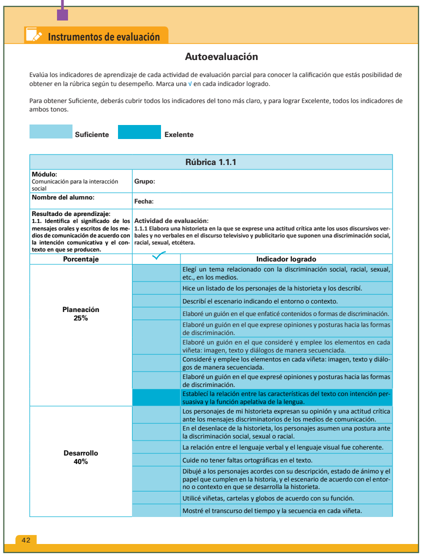


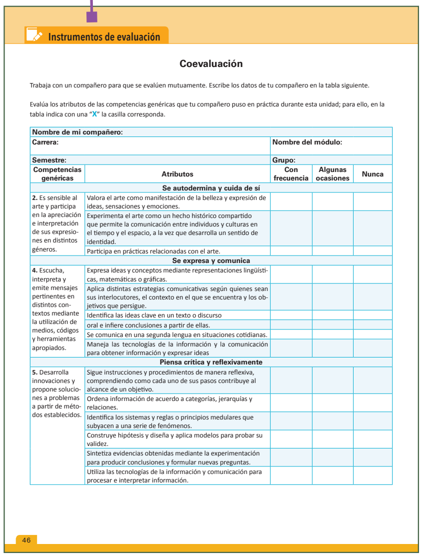
Prueba Planea
Se incluye al final de cada unidad con el fin de que los alumnos se preparen para la aplicación de las pruebas Planea y Pisa que realizarán en su último grado escolar.

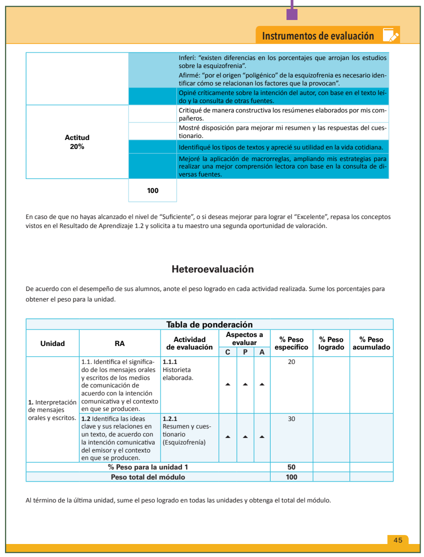
Actividad de evaluación
Son las actividades de evaluación marcadas en el programa oficial del módulo que serán calificadas por el SAE (Sistema de Administración Escolar) del Conalep. Desarrolladas con instrucciones claras y precisas para llevarse a cabo.











Instrumentos de evaluación

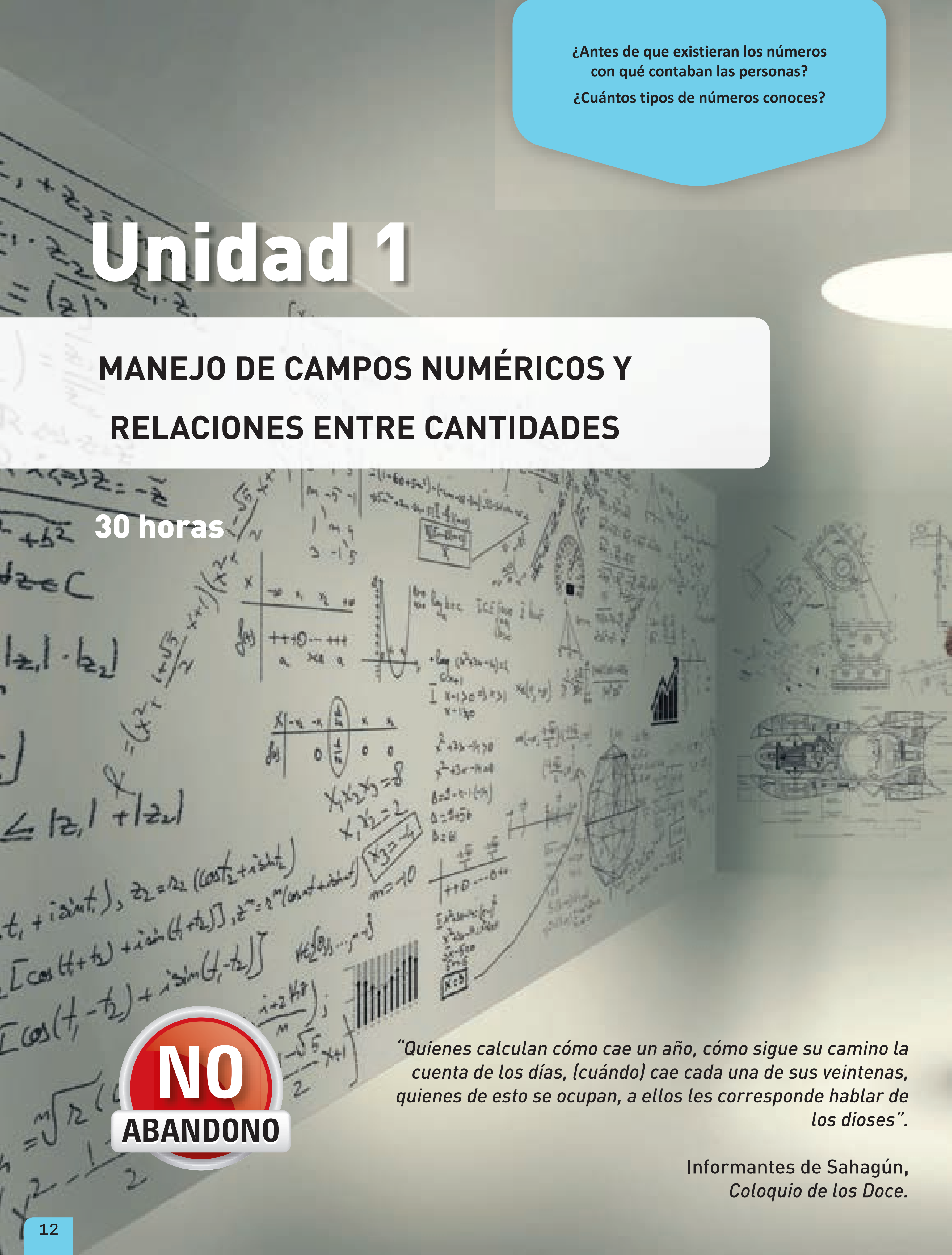
Se incluyen al final de cada unidad en las tres modalidades de: *Autoevaluación* (la realiza el alumno en cada una de las actividades de evaluación parcial marcadas en el programa oficial del módulo que serán calificadas por el SAE), *Coevaluación* (cada alumno evalúa a un compañero considerando los atributos que éste trabajó en la unidad) y *Heteroevaluación* (es la evaluación sumativa que realiza el profesor con base en la calificación que obtiene el alumno en cada evaluación parcial).

Cultura para la Paz

Es uno de los Ejes Transversales para el desarrollo de "Aprendizajes para la Vida". En esta sección los alumnos ponen en práctica diversas estrategias para lograr algunas de las habilidades y actitudes éticas sobre valores de: comprensión, orden, justicia, reconocimiento del otro, cooperación, disciplina, equidad, límites democráticos y comunicación, y en particular, sobre la prevención de conflictos, con el fin de que aprendan a crear su propio camino hacia la sana convivencia.

Cultura financiera y para el consumo

Es uno de los Ejes Transversales para el desarrollo de "Aprendizajes para la Vida". En esta sección, los alumnos ponen en práctica estrategias para que administren y planifiquen su dinero; desarrollen una actitud crítica hacia el consumo, y conozcan sus derechos y deberes como consumidores. Esto con el fin de que sean capaces de decidir qué consumir, cómo hacerlo y por qué, y basen sus decisiones en el valor real que para ellos tienen los productos, según sus necesidades y deseos.



¿Antes de que existieran los números con qué contaban las personas?

¿Cuántos tipos de números conoces?

Unidad 1

MANEJO DE CAMPOS NUMÉRICOS Y RELACIONES ENTRE CANTIDADES

30 horas

NO ABANDONO

"Quienes calculan cómo cae un año, cómo sigue su camino la cuenta de los días, (cuándo) cae cada una de sus veintenas, quienes de esto se ocupan, a ellos les corresponde hablar de los dioses".

Informantes de Sahagún,
Coloquio de los Doce.

Competencias genéricas

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Competencias disciplinares de matemáticas

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

VIDEO 1 DIGITAL

Dos genios matemáticos

Georg Cantor, el fundador de la teoría de conjuntos, considerado por muchos como una de las mentes más originales en la historia de las matemáticas, nació en San Petersburgo, Rusia, en 1845. Sus padres trasladaron a la familia a Frankfurt, Alemania, en 1856. Cantor entró en el Gymnasium de Wiesbaden a la edad de 15, y dos años más tarde comenzó su carrera universitaria en Zurich, Suiza.

En 1863 Cantor se trasladó a la Universidad de Berlín, que durante este tiempo fue considerado el principal centro mundial de la investigación matemática. Cuatro años más tarde Cantor recibió su doctorado bajo la supervisión de Karl Weierstrass (1815-1897).

En 1869 Cantor obtuvo un puesto como conferencista en la Universidad de Halle. Diez años más tarde fue ascendido a profesor de tiempo completo. Sin embargo, Cantor nunca alcanzó su sueño de impartir una cátedra de matemáticas en Berlín. Se cree que una de las razones fue la poca aceptación de su teoría de conjuntos por los matemáticos de ese tiempo, principalmente por Leopold Kronecker (1823–1891), profesor de la Universidad de Berlín y una figura muy influyente en las matemáticas alemanas, tanto matemáticamente como políticamente.

Georg Cantor hacia 1870.

Cantor murió en 1918 en ese momento sus ideas revolucionarias eran cada vez más aceptadas por algunas de las principales figuras del nuevo siglo. Uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, David Hilbert (1862-943), describió la nueva matemática de Cantor como “el más asombroso producto del pensamiento matemático”, y afirmó “nadie nos podrá expulsar del paraíso que Cantor ha creado para nosotros”.

NO ABANDONO

"Dondequiera que haya un número está la belleza".

Proclo

Richard Dedekind hacia 1870. Cortesía de la Biblioteca del Instituto Federal Suizo de Tecnología, Zurich.

Richard Dedekind fue un importante matemático alemán, que era un amigo y un aliado de Cantor. Nació en Braunschweig, Alemania, en 1831. En 1848 Dedekind entró en el Collegium Carolinum en Braunschweig, y en 1850 ingresó en la Universidad de Göttingen, un importante centro alemán de las matemáticas y hogar del gran Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Dedekind se convirtió en el último alumno de Gauss. En 1852 Dedekind recibió su doctorado, y pasó los siguientes dos años en la Universidad de Berlín la meca de las matemáticas de la segunda mitad del siglo XIX. En la Universidad de Berlín, Dedekind se hizo amigo de Bernhard Riemann (1826-1866).

Dedekind volvió a Göttingen para enseñar como profesor particular. En Göttingen, Dedekind se hizo amigo de Lejeune Dirichlet (1805-1859). Después de la muerte de Dirichlet, Dedekind escribió los trabajos de Dirichlet sobre la teoría de números, los cuales fueron publicados en 1863. También escribió las obras de Gauss y Riemann. De 1858 a 1862 Dedekind enseñó en el Instituto Politécnico de Zurich. En 1862 Dedekind regresó a su natal Braunschweig para enseñar en el Instituto. Pasó el resto de su vida allí. Dedekind se retiró en 1894, pero continuó activa la investigación matemática hasta su muerte.

Dedekind es sobre todo conocido por sus investigaciones en el álgebra y la teoría de conjuntos. Él fue el primero en definir los números reales por medio de cortes de números racionales. Al día de hoy muchas escuelas de todo el mundo enseñan la teoría de los números reales con base en los cortes de Dedekind. Dedekind fue el primero en introducir el concepto de un “ideal”, un concepto clave en álgebra moderna. Sus contribuciones a la teoría de conjuntos, así como al estudio de los números naturales son igualmente importantes. Dedekind fue un matemático muy respetado durante su vida. Fue elegido miembro de la Academia de Berlín y Roma, así como de la Academia de Ciencias de Francia, y también fue galardonado en las universidades de Oslo, Zurich, y Braunschweig.

Dedekind fue uno de los primeros que reconoció la importancia de las ideas de Cantor, y se convirtió en su principal aliado en la promoción de la teoría de conjuntos.

Para saber más sobre los trabajos de Cantor y de Dedekin se puede consultar las fuentes originales históricas de Cantor *“Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre” (“Contribuciones a los fundamentos de la teoría de los números transfinitos”)* y de Dedekind *“Was sind und was sollen die Zahlen?” (“La naturaleza y el significado de los números”*).

Eric Temple Bell, *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincare* (en español: *Los hombres de matemáticas: La vida y los logros de los grandes matemáticos de Zeno de Poincaré)*, Simon y Schuster, Nueva York, 1986, pp. 510 y 555 (traducción y adaptación de Enrique Campos).

Evaluación de comprensión lectora

Con base en el texto anterior, lee las siguientes preguntas y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Por cuáles investigaciones es conocido Dedekin?

    (a) Por sus investigaciones sobre álgebra moderna.

    (b) Por sus investigaciones sobre teoría de conjuntos y álgebra.

    (c) Por sus investigaciones sobre teoría de números.

    (d) Por sus investigaciones sobre los ideales.

2. ¿Quién es considerado como el fundador de la teoría de conjuntos?

    (a) Lejeune Dirichlet.

    (b) Karl Weierstrass.

    (c) Georg Cantor.

    (d) Richard Dedekind.

3. ¿Quién fue el primero en definir a los números reales?

    (a) George Cantor.

    (b) Carl Friedrich Gauss.

    (c) Bernhard Riemann.

    (d) Richard Dedekind.

4. ¿Por qué Cantor nunca dio una cátedra matemática en Berlín?

    (a) Porque sus ideas revolucionarias sobre la teoría de conjuntos no eran aceptadas.

    (b) Porque no era de origen alemán.

    (c) Porque no era alumno de Leopold Kronecker.

    (d) Porque sus ideas sobre la teoría de conjuntos no eran ciertas.

5. ¿Qué matemático destacó notablemente las ideas de Cantor?

    (a) Richard Dedekind.

    (b) Karl Weierstrass.

    (c) David Hilbert.

    (d) Lejeune Dirichlet.

Lee con atención cada pregunta y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿En cuál de las siguientes agrupaciones todos son números primos?
   - a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
   - b) 3, 5, 7, 9, 11, 21
   - c) 2, 4, 6, 8, 10, 12
   - d) 2, 3, 5, 7, 11, 13

2. Son los números que son estrictamente mayores que cero.
   - a) Primos.
   - b) Positivos.
   - c) Negativos.
   - d) Enteros.

3. Son múltiplos del 7:
   - a) 35, 56, 84, 105, 112
   - b) 7, 22, 36, 106, 113
   - c) 7, 17, 27, 37, 47
   - d) 7, 11, 13, 19, 23

4. Si multiplicamos dos números con signos distintos, el resultado es un número:
   - a) Par.
   - b) Cero.
   - c) Negativo.
   - d) Positivo.

5. Es la rama de las matemáticas que estudia a los números y sus propiedades.
   - a) Álgebra.
   - b) Geometría.
   - c) Aritmética.
   - d) Probabilidad.

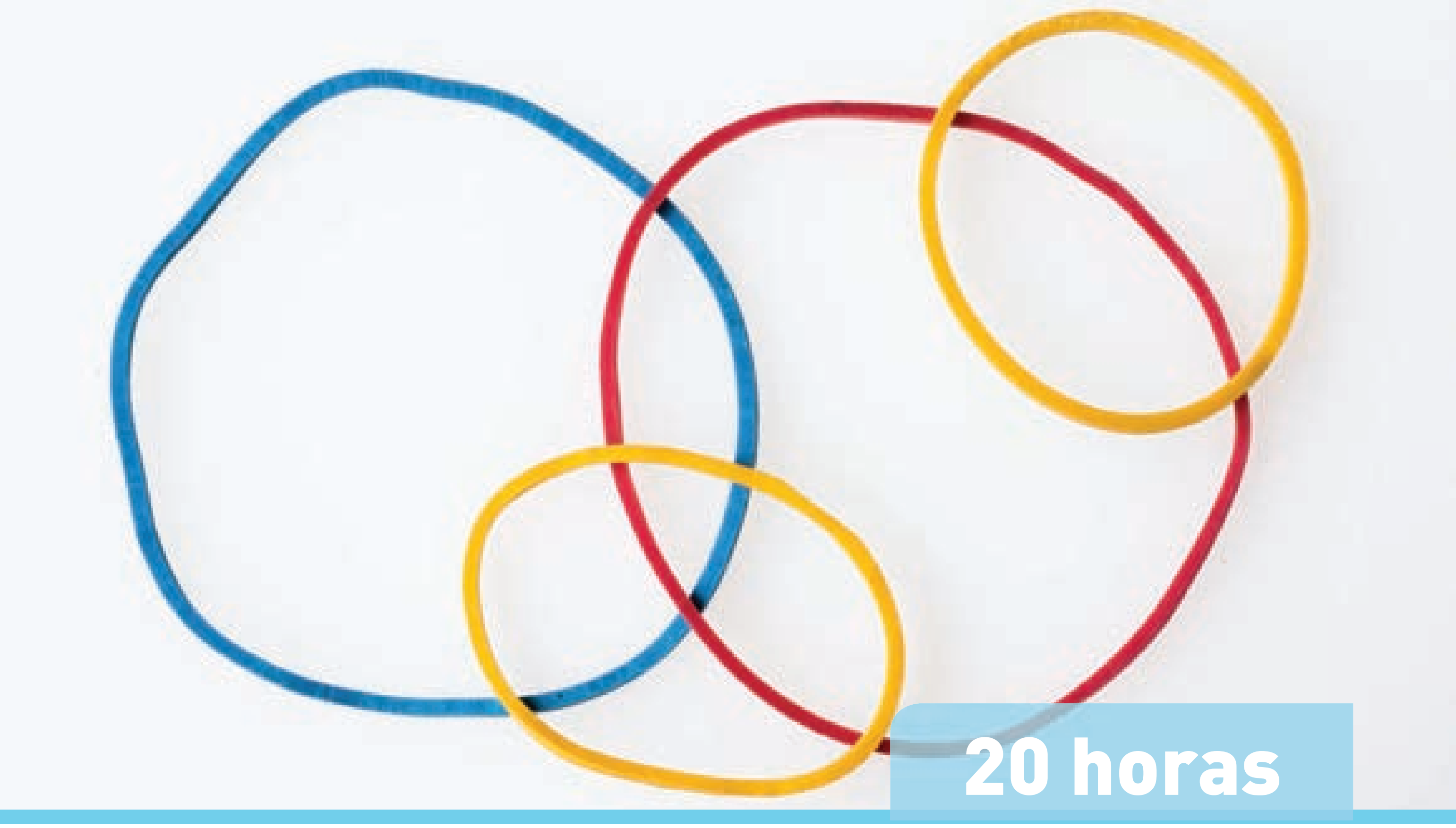
6. El resultado de simplificar la expresión: $4 - \{10 + 25 - [\,4 - 1 - (8 - 15 - 19) + 12\,] - 5\,\}$, es:
   - a) 15
   - b) – 1
   - c) – 15
   - d) 28

7. Si José tiene \$20 y Óscar tiene \$10 menos de lo que tiene José, ¿cuánto dinero tienen entre los dos?
   - a) \$8
   - b) \$16
   - c) \$30
   - d) \$40

8. Una alberca de 2.5 m de profundidad contiene 95 000 litros de agua cuando está llena. Si el nivel de agua baja a 1.8 m, ¿qué cantidad de agua queda en el estanque?
   - a) 11 805.5 litros.
   - b) 23 800 litros.
   - c) 30 357.14 litros.
   - d) 68 400 litros.

9. Calcula el resultado de la siguiente expresión: $\frac{8}{5} \div \frac{2}{15} - 12$.
   - a) $\frac{2}{5}$
   - b) 0
   - c) – 4
   - d) $\frac{8}{15}$

10. Halla el valor de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{2}$.
    - a) 4
    - b) $2\sqrt{2}$
    - c) $\sqrt{2}$
    - d) 2



1.1 Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales y la aplicación de sus operaciones básicas

Actividad de inicio

Atención-Concentración

VALORES

TIC

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. • **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
ATRIBUTO	• Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

1. En equipo de cinco integrantes, de ser posible, consigan con anticipación el juego de mesa *Fantasma Blitz,* el cual se adquiere en tiendas departamentales o especializadas en juegos de mesa, y jueguen con él según las instrucciones de la caja, o bien, siguiendo las indicaciones del siguiente video "Fantasma Blitz [Juego de Mesa / BoardGame]".

   https://www.youtube.com/watch?v=WGwKI598d8E

2. De no ser posible conseguirlo, elaboren con hojas de papel y colores un juego similar de la siguiente manera:
3. Doblen ocho hojas tamaño carta en ocho partes iguales y recórtenlas. Obtendrán 64 cartas.
4. Escojan 5 objetos pequeños de distinto color que colocarán al centro de la mesa, pueden ser por ejemplo: 1 goma, 1 sacapuntas, 1 moneda, 1 llavero, 1 calculadora, etcétera. Como requisito, el objeto debe ser de un solo color, pero que no se repita entre los cinco.
5. Repartan las cartas y entre todos, con colores de los mismos tonos que los objetos, dibujen en cada carta dos de los objetos que escogieron pero con las siguientes características:
   - No importa la perfección del dibujo, sólo que se note claramente qué es y sea de los colores idénticos a los objetos escogidos.
   - Cada uno de los objetos lo dibujarán idéntico (color y forma) junto con cada uno de los otros 4 objetos pero que no tendrá su color idéntico; por ejemplo, si pusieron un sacapuntas azul y una goma blanca, el sacapuntas será azul y la goma roja, o viceversa. Recuerden que dibujarán 5 veces el sacapuntas azul con otro objeto que no tendrá su color original, así lo harán con cada uno de los objetos.
   - Luego dibujen en el resto de las cartas dos objetos pero de distinto color, ninguno de los dos objetos tendrá su color original, pero sí tendrán cualquier otro color de los tres objetos restantes. Procuren hacerlo de manera equitativa para que queden distribuidos los colores en todos los objetos. Si les sobran cartas en blanco, repitan dibujos o desénchelas.
6. Una vez que estén terminadas las cartas jueguen con estas reglas:
   - Coloquen los objetos juntos al centro de la mesa.
   - Revuelvan las cartas y pongan el mazo bocabajo. Cada jugador tendrá un turno por ronda para tomar una carta.
   - En cada turno se desvela una carta y los jugadores deben atrapar (tomar con la mano, así que ¡cuidado con los manotazos!) rápidamente el objeto que coincide en forma y color con alguno de los mostrados en la carta.
   - El problema es que en la mayoría de las cartas no hay ningún objeto que encaje con esa descripción.
   - En ese caso, los jugadores deben coger el objeto que no coincide ni en forma ni en color con ninguno de los mostrados en la carta.
   - El jugador que logré identificar el objeto correcto y lo tome primero se quedará con la carta. Ganará el que acumule más cartas al final de sacar todo el mazo.
   - En caso de que un jugador tome un objeto incorrecto, tendrá que devolver una carta, y el jugador que sí acierte correctamente se llevará la carta devuelta más la carta de premio.
7. Al término del juego, organicen las cartas por conjuntos y luego compartan con los demás equipos los criterios que usaron para agruparlas.

En la vida cotidiana encontramos personas reunidas alrededor de un evento ya sea cultural, deportivo o musical; también podemos hallar reuniones de múltiples objetos como son las frutas y verduras en un mercado o los animales dentro de un zoológico o en un circo, o los libros en una librería.

Imagínate que podemos reunir a todas las personas que viven en México dentro de un cuarto lo suficientemente grande, y separémoslas en dos grupos: las que practican natación y las que no. Podemos separar al primer grupo en un tercer grupo y un cuarto grupo; por ejemplo, en las personas que son mujeres y las que son hombres, respectivamente, ¿de cuántas maneras podemos separar al tercer y cuarto grupo?

Nota que en el tercer grupo existe una relación entre estas personas, es decir, tienen ciertas propiedades que definen a dicho grupo, tales propiedades son: viven en México, practican natación y son mujeres. Si habláramos de algunos objetos en particular, ¿será posible agrupar dichos objetos y separarlos de manera similar?

Como has observado en la actividad de inicio, diariamente nos encontramos en situaciones en las cuales de manera natural agrupamos personas u objetos que tienen alguna propiedad en común; por ejemplo:

- Todas las personas a las que les gusta la danza clásica.
- Todos los animales que están en parque Africam Safari.
- Todas las frutas que hay en el mercado Morelos.
- Todas las personas que nacieron en 1874 y que aún viven.
- Todos los números que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 100$.
- Todos los números que satisfacen $x^2 + 1 = 0$.

Además nos podemos preguntar acerca de estas agrupaciones y de las propiedades que las caracterizan. Tales agrupaciones y lo que se puede hacer con ellas y sus componentes es materia de estudio de una parte de las matemáticas, conocida como **teoría de conjuntos**, la cual conocerás con detalle en la primera parte de esta unidad.

JUEGO 1 DIGITAL

Manejo de la teoría de conjuntos

La **teoría de conjuntos** es una división de las matemáticas que estudia los conjuntos. Esta teoría es un medio para poder dominar un lenguaje que es muy útil en las diferentes ramas de las matemáticas y en muchos otros campos teóricos o aplicados, por lo que es favorable utilizar su simbología y su terminología. Esta teoría, como viste en la lectura de inicio, fue desarrollada por Boole y el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) a finales del siglo XIX, la cual ha tenido un gran peso en el auge de las matemáticas del siglo XX.

TIC

En el siguiente link podrás descargar el documento "Nomenclatura, notación y simbología matemática", te será útil para resolver dudas sobre la simbología.

https://www.academia.edu/8146921/Principales_s%C3%ADmbolos_matem%C3%A1ticos

Definición, notación y clasificación

A continuación definiremos qué es un conjunto y describiremos la clasificación de éstos, pero es importante que antes repases qué es la "notación" en general, para que te sea más sencillo entender la notación de conjuntos.

La **notación matemática** es un lenguaje simbólico formal que sigue una serie de convenciones propias, en el cual se apoya la matemática. En la notación los símbolos representan un concepto, una relación, una operación o una fórmula matemática, según ciertas reglas. Estos símbolos no deben considerarse abreviaturas, sino entidades con valor propio y autónomo.

La notación es muy amplia y particular no sólo para cada área de las matemáticas, sino también para otras ciencias en general; por ejemplo, física, química y biológica, e incluso, en el arte, como la música; es decir, existen múltiples símbolos y cada uno con sus particularidades. En este momento, sólo veremos algunos símbolos relacionados con la teoría de conjuntos y sus principios básicos.

Algunos principios básicos de la notación son:

- Los símbolos de una letra se representan en letra cursiva: *a*, *b*, *c*, *d*, *i*, *x*, *z*, etcétera.
- Los símbolos de varias letras se representan en letra redonda: cos α, exp *x*, etcétera.

Algunas de las diferentes notaciones utilizadas en conjuntos son:

Símbolo	Nombre	Se lee así
{,}	Delimitador de conjunto	El conjunto de
{:} , {|}	Notación constructora de conjuntos	El conjunto de los elementos … tales que …
ø, {}	Conjunto vacío	Conjunto vacío
∈	Pertenencia de conjuntos	En; está en; es elemento de; es miembro de; pertenece a

Símbolo	Nombre	Se lee así
$\notin$	No (pertenencia de conjuntos)	No (está en; es elemento de; es miembro de; pertenece a)
$\subseteq$, $\subset$	Subconjunto	Es subconjunto de
$\cup$	Unión	La unión de … y … ; unión
$\cap$	Intersección	Intersección de … y … ; intersección
$-$	Diferencia	Menos
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	Si y sólo si. A $\Leftrightarrow$ B significa: A es verdadera sólo si B es verdadera y viceversa

La siguiente tabla contiene algunos ejemplos de símbolos utilizados en la teoría de conjuntos numéricos que se escriben con la tipografía *blackboard bold.*

Símbolo	Uso matemático
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\mathbb{P}$	Números primos
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{Z}$	Números enteros

Las siguientes expresiones matemáticas ya las conociste en primaria y secundaria, pero conviene que también las tengas presentes en este curso.

Relación	Notación	Se lee
Igualdad	$x = y$	x es igual a y
Menor que	$x < y$	x es menor que y
Mayor que	$x > y$	x es mayor que y
Aproximado	$x \approx y$	x es aproximadamente igual a y

Otras expresiones que usarás son:

Cuantificador	Notación	Se lee
Tal que	$x \mid y$, o bien, $x \ni y$	x, tal que y
Por lo tanto	$x \therefore y$	x, por lo tanto, y

AUDIO 1 DIGITAL

Definición de conjuntos

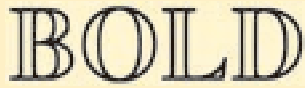
El concepto de “conjunto” es **intuitivo** y se podría definir como una “colección bien definida de objetos”. A cada uno de estos objetos les denominaremos “elementos del conjunto”. Así, se puede hablar de un conjunto de personas, países, libros, zapatos o del conjunto de objetos que hay en un momento dado encima de un escritorio. Un conjunto está bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, el conjunto de las jugadoras del equipo de futbol americano femenil *All Stars Condesa* está bien definido, porque a la vista todas las jugadoras son mujeres y tienen su uniforme de color azul con el nombre del equipo grabado y estrellas en las fundas de color verde fluorescentes, mismo tono que también llevan en las calcetas, lo cual las caracteriza, se puede saber que son mujeres y que su uniforme es de americano y si es azul o no.

Equipo de futbol americano femenil All Stars Condesa, Deportivo Hermanos Galeana, Ciudad de México, septiembre de 2015.

CURIOSIDADES

La tipografía *blackboard bold*, o en español: *negrita de pizarra*, es una tipografía utilizada en textos matemáticos para ciertos símbolos, que se distingue porque las líneas del símbolo (usualmente verticales) se duplican. Esta tipografía se utiliza, por lo común, para denotar conjuntos numéricos.

La tipografía *blackboard bold* se originó como un intento de representar en un pizarrón símbolos tradicionalmente impresos en negrita. Este hábito terminó por convertirse introducirse en los textos impresos, diferenciado de la negrita normal.



Palabra “bold” (negrita) escrita en *Blackboard bold.*

Glosario

Intuitivo: que tiene facilidad para comprender las cosas instantáneamente, sin necesidad de razonamiento.

Las matemáticas siempre sirven

El físico Freeman Dyson cuenta siempre la famosa conversación que mantuvieron el astrónomo James Jeans y el todólogo Oswald Veblen en la primera década del siglo XX acerca del plan de estudios de Princeton. “Podríamos suprimir la teoría de conjuntos –dijo Jeans–; es una materia que jamás será útil para la física”. Resulta que la teoría de conjuntos ha sido esencial para el estudio de la mecánica cuántica.

Conclusión: nunca digas que algo no sirve para nada porque al final tienen alguna utilidad, y más si es algo matemático.

El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque a simple vista no siempre se podrá decir si son altas o no, ya que el criterio para medir la altura podría variar de una persona a otra.

Como hemos dicho, un conjunto es una agrupación, clase o colección de objetos denominados elementos del conjunto, pero por objeto entenderemos no sólo entes físicos, como pelotas, frutas, etc., sino también entes abstractos, como son letras, números, etc. La relación de pertenencia entre los elementos y los conjuntos siempre es perfectamente discernible, en otras palabras, si un objeto pertenece a un conjunto o no, siempre puede calificarse como verdadero o falso.

Un conjunto se puede determinar o representar de dos maneras: por **extensión** y por **compresión**.

La primera, denominada **representación por extensión**, es aquella en la que listamos de manera explícita todos los elementos del conjunto, en nuestro primer ejemplo se puede decir: los elementos de A son i, a y o. Escribiremos entre llaves y separados por comas a los elementos de un conjunto cuando éste se represente por extensión $A = \{a, i, o\}$.

1. $A = \{a, l, u, m, n, o\}$.
2. $B = \{$*Rusia, Alemania, Italia, Bulgaria*$\}$.
3. $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.
4. $M = \{$*Beethoven, Mozart, Bach, Tchaikovsky, Wagner, Chopin*$\}$.

La segunda, conocida como **representación por comprensión**, es en la que escribimos una propiedad que deben cumplir los elementos de un conjunto, es decir, cuando sólo se menciona una característica común de todos los elementos; por ejemplo, si X es un conjunto y P es una propiedad que caracteriza a los elementos de X, usualmente escribimos $X = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } P\}$ y se lee X es el conjunto de todos los elementos x, tales que tienen la propiedad P; la barra vertical | se lee “tal que”. En nuestro ejemplo escribiríamos $A = \{x \mid x \text{ es una vocal de la palabra radio}\}$, donde P es la propiedad: es una vocal de la palabra radio.

1. $X = \{x \mid x \text{ es un número negativo menor que } 10\}$.
2. $C = \{c \mid c \text{ es una ciudad de un país de América}\}$.
3. $Y = \{y \mid y \text{ es un número primo menor que } 50\}$.
4. $R = \{r \mid r \text{ es el resultado del tiro de un par de dados}\}$.

Notación de conjuntos

Como vimos al inicio del tema, es costumbre **denotar** a los conjuntos por medio de letras mayúsculas del alfabeto A, B, C y X, y a los elementos de los conjuntos por medio de letras minúsculas del alfabeto a, b, c y x. Si X es un conjunto, x es un elemento de X o x pertenece a X se denotará por $x \in X$. Por otro lado, x no es elemento de X o x no pertenece a X, se denotará por $x \notin X$. Nótese que el símbolo de **pertenencia** $\in$ relaciona un elemento con un conjunto. Por ejemplo, si A es el conjunto de las vocales de la palabra radio, entonces “o es elemento del conjunto A” y r, aunque es una letra de la palabra radio, “no es elemento del conjunto A” por ser consonante. Usando la notación de pertenencia escribimos, o $\in A$ y $r \notin A$.

Veamos un ejemplo de la **notación de pertenencia**:

Considérese el conjunto N de los números impares mayores que 0 y menores que 35, decide si cada uno de los números es o no elemento de N, y representa esto por medio de la notación de pertenencia.

1. 7
2. 35
3. 8
4. –39

Solución:

1. Puesto que 7 es un número impar mayor que 0 y menor que 35, entonces, pertenece al conjunto N. Y se escribe: $7 \in N$.
2. Aunque 35 es un número impar, no es menor que 35, por lo que 35 no pertenece a N. Y se escribe: $35 \notin N$.
3. El 8 es un número par; por lo tanto, no pertenece a N. Y se escribe: $8 \notin N$.
4. El –39 es un número impar menor que 30, pero no es mayor que 0; por lo tanto, no pertenece a N. Y se escribe: $-39 \notin N$.

A parte de la notación de conjuntos, éstos se pueden nombrar por medio de **proposiciones**, que son enunciados que describen al conjunto.

Por ejemplo:

$A = \{b, c, d, f, g\}$ ⟵ Notación de conjuntos.

El conjunto de las primeras cinco
consonantes del abecedario ⟵ Preposición.

Actividad de desarrollo

Libertad

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. • **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
ATRIBUTO	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

1. De manera individual, realiza los siguientes problemas.

   Se tiene un conjunto cuyos elementos son los países Rusia, Alemania, Italia y Bulgaria, de las siguientes formas de nombrarlo, ¿cuál es la mejor y por qué?

   1. Europa   2. *r*   3. *A*   4. Cuatro

   Porque: ____

   ____

2. Escribe en la línea ∈ o ∉ según corresponda a los elementos con relación al siguiente conjunto:

   F es el conjunto formado por las frutas manzana, piña, durazno, guayaba, naranja y melón.

   1. Naranja ________ *F*
   2. Melón ________ *F*
   3. Papaya ________ *F*
   6. Ciruela ________ *F*
   5. Piña ________ *F*

3. Comparte tus respuestas con tus compañeros, determinen el resultado correcto y comenten cómo llegaron a él.

Existen algunos conjuntos de número que se han estudiado en la primaria y secundaria. Pero sin la notación conjuntista, estos conjuntos son:

1. El **conjunto de los números naturales** que se denotará por $\mathbb{N}$ o por extensión $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$.
2. El **conjunto de los números enteros** que se denotará por $\mathbb{Z}$ o por extensión $\mathbb{Z} = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.
3. El **conjunto de los números racionales** que se denotará por $\mathbb{Q}$ o por comprensión

   $\mathbb{Q}= \{\frac{a}{b} |\ a \in \mathbb{Z}\ ,\ b \in \mathbb{Z}$ y b 0$\}$.

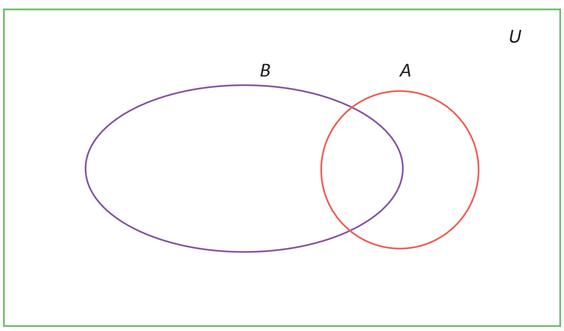
4. El **conjunto de los números irracionales** que se denotará por $\mathbb{P}$, daremos algunos ejemplos del tipo de elementos que tiene $\mathbb{P}$, el conocido número π es un número irracional, el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1, es decir, $\sqrt{2}$, el número de Euler e y uno de los números irracionales más impresionantes, el así llamado número áureo o de oro ϕ. Podemos decir que los números irracionales son aquellos que no se pueden representar como un número racional.

Clasificación de conjuntos

Hemos visto algunos ejemplos de conjuntos y algunas propiedades que caracterizan a los elementos de un conjunto, tal propiedad alude a un cierto tipo de objetos. En nuestro primer ejemplo $A = \{a, i, o\}$, cuyos elementos son vocales de la palabra radio, ésta es una propiedad que se refiere a las vocales de una palabra y no a números o colores. Sea $I = \{i\}$, $O = \{o\}$, $X = \{r, d\}$. Nótese que los elementos de los conjuntos A, I, O y X son todos del mismo tipo, es decir, son letras de la palabra radio. Ahora considérese el conjunto Z de todas las personas que nacieron en 1874 y que aún viven, no es difícil convencerse que este conjunto no tiene elementos.

Conjunto universal

El **conjunto universal** es aquel al que pertenecen todos los elementos que forman parte de los conjuntos con los cuales se está trabajando en un problema en particular; en otras palabras, el conjunto donde tendrán sentido las propiedades que caracterizan a los elementos de esos conjuntos y se denotará por la U mayúscula o la letra griega omega mayúscula Ω.



En nuestro ejemplo el conjunto universal es el conjunto de "letras de la palabra radio". Otro conjunto universal podría ser "todas las personas que estudian matemáticas".

Es muy importante definir perfectamente cuál es el conjunto universal, ya que eso determinará el marco de referencia. Usualmente se usan diagramas para representar al conjunto universal U y a los conjuntos que se definen con los elementos que pertenecen a U. Al conjunto universal se le representa con un rectángulo grande dentro del cual se dibujan círculos u otras figuras las cuales representan a los demás conjuntos. A este tipo de diagramas se les llama **Diagramas de Venn**.

Nota:

La **cardinalidad** determina el número de elementos de un conjunto y se denota por $n(A)$. La cardinalidad de la unión de dos conjuntos $n(A \cup B)$ se denota de la siguiente manera:

$N(A \cup B) = n(A) + n\ (b) - n(A \cap B)$.

Ejemplo:

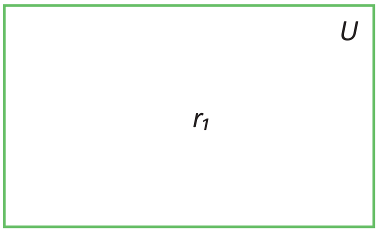
La cardinalidad del conjunto A = {vocales} es 5 y se representa $A = 5$.

Diagrama de Venn-Euler

Hagamos un alto para repasar los Diagramas de Venn, recordemos que éstos son representaciones gráficas útiles para resolver problemas lógicos simples. Fueron creados por el matemático británico John Venn (1834-1923), quien introdujo el concepto de representar gráficamente los conjuntos por medio de figuras geométricas cerradas llamadas diagramas de Venn. En los diagramas de Venn, como mencionamos anteriormente, el conjunto universal está representado por un rectángulo y todos los otros conjuntos por los círculos dentro del rectángulo. Más adelante, vamos a utilizar diagramas de Venn para ilustrar diversas operaciones (unión, intersección y diferencia).

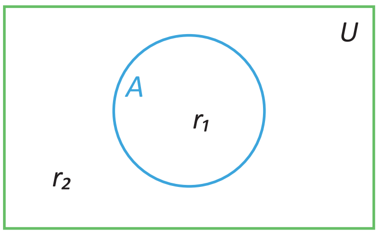
Podemos expresar la relación entre los conjuntos de la siguiente manera:

- Un rectángulo se utiliza para representar un conjunto universal.
- Los círculos u óvalos se utilizan para representar otros subconjuntos del conjunto universal.
- El U se representa por medio de un rectángulo y limita el espacio en una región (r_1).



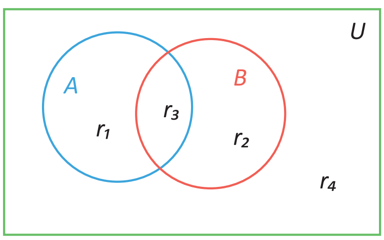
$$n(U) = n(r_1)$$

- Universo con un conjunto cualquiera A (*dentro de una línea curva cerrada*) divide el espacio en dos regiones r_1 y r_2, la de los elementos que $\in A$ y la de los que $\notin A$.



$$n(U) = n(r_1) + n(r_2)$$
$$n(A) = n(r_1)$$
$$n(A^c) = n(r_2)$$

- Universo con dos conjuntos cualesquiera A y B divide el espacio en cuatro regiones que son:



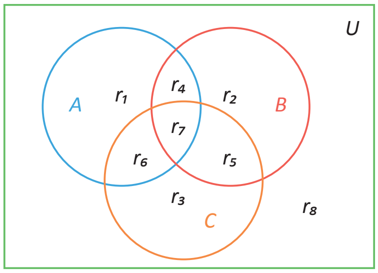
$$n(U) = n(r_1) + n(r_2) + n(r_3) + n(r_4)$$
$$n(A) = n(r_1) + n(r_3)$$
$$n(B) = n(r_2) + n(r_3)$$

NO ABANDONO

"Con números se puede demostrar cualquier cosa".

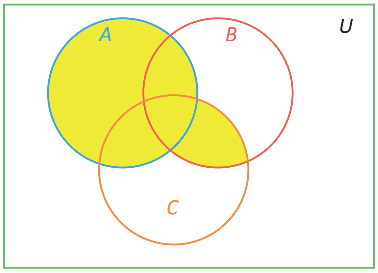
Thomas Carlyle

- Si el U contiene tres conjuntos cualesquiera A, B y C está dividido en ocho regiones:



$$n(U) = n(r_1) + n(r_2) + n(r_3) + n(r_4) + n(r_5) + n(r_6) + n(r_7) + n(r_8)$$
$$n(A) = n(r_1) + n(r_4) + n(r_6) + n(r_7)$$
$$n(B) = n(r_2) + n(r_4) + n(r_5) + n(r_7)$$
$$n(C) = n(r_3) + n(r_5) + n(r_6) + n(r_7)$$

Todas las operaciones y leyes se pueden representar con un diagrama de Venn, se acostumbra sombrear la parte que indica lo que se ha realizado. Tal es el caso de $A \cup (B \cap C)$.



Actividad de desarrollo

Colaboración
VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. • **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
ATRIBUTO	• Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

1. En pareja, realicen los ejercicios en su cuaderno.

- Completen cómo es un U con cuatro conjuntos cualesquiera A, B, C y D.

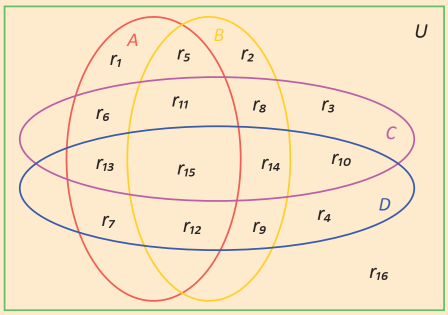
  $n(U) =$

  $n(A) =$

  $n(B) =$

  $n(C) =$

  $n(D) =$



2. Construyan los diagramas de Venn y resuelvan las operaciones, en cada caso, según los conjuntos dados.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 4\}$

a. $A \cap B$

b. $B \cap C$

c. $A \cap B$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ y $C = \{5, 6, 8\}$

a. $A \cup C$

b. $B \cup C$

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e\}$ y $C = \{d, f, g\}$

a. $A - C$

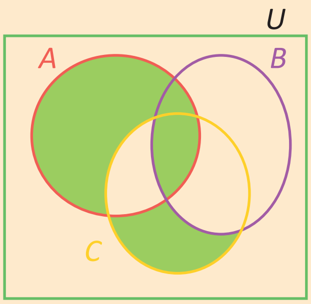
b. $B - C$

3. Sean $\mathbb{U} = \{m, a, r, t, e\}$ y $A = \{t, e\}$. Realicen el diagrama y determinen los elementos de A^c.

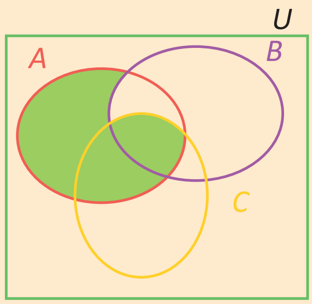
4. Con los conjuntos $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$, calculen: $(B - A)^c = \{ \qquad \}$

5. Escriban las operaciones que correspondan al conjunto sombreado en cada uno de los diagramas.

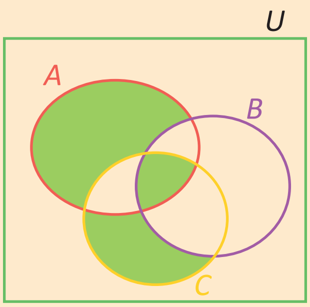
a)



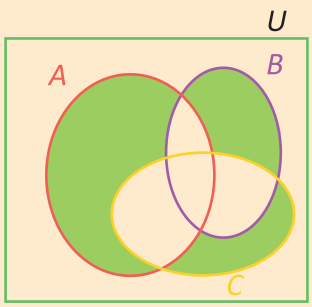
b)



c)



d)



6. Contrasten sus respuestas con sus compañeros grupo.

Conjunto vacío

Regresando a la clasificación de conjuntos, **el conjunto vacío** resulta posible de ser definido cuando en un conjunto no se encuentre ningún elemento del universo.

Por ejemplo, cuando "*x es un número natural y x es par e impar*"; esta característica define un conjunto, que no tiene elementos, pues no es posible cumplirla, a este conjunto se le denomina **conjunto vacío** y se denota con el símbolo Ø o también puede expresarse con las llaves vacías { }.

La relación entre Ø y el resto de los conjuntos es $\emptyset \subseteq A$, podemos entonces decir que Ø es un subconjunto del conjunto A.

Veamos un ejercicio de conjunto vacío:

Determina cuál de las propiedades siguientes define un conjunto vacío.

1. $A = \{m | m$ es un número primo par$\}$
2. $B = \{y | \ y$ es un número real, tal que $x^2 < 0\}$
3. $C = \{y | \ y$ es un número entero entre -13 y $-12\}$
4. $D = \{\emptyset\}$

Solución:

1. Como 2 es un número par y es primo, por lo tanto, el conjunto A no es vacío.
2. Sabemos que todo número elevado al cuadrado nos da un número positivo, por lo tanto, el conjunto B es vacío.
3. No existe número entero entre –13 y –12, así que el conjunto C es vacío.
4. $\{\emptyset\}$ no es un conjunto vacío, es un conjunto que tiene un elemento, a saber el conjunto vacío.

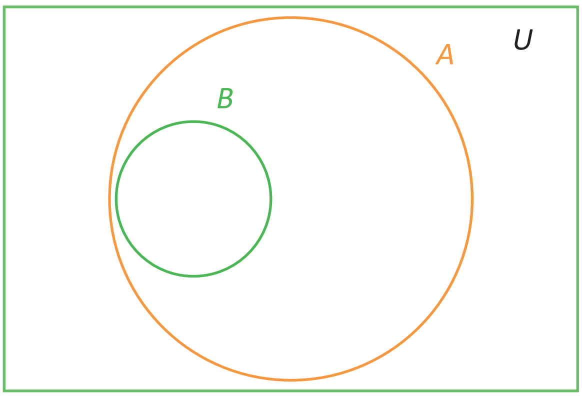
Subconjunto

Recordemos nuestra primera actividad en términos de la teoría de conjuntos. Sean U el conjunto universal de todas las personas que viven en México, $A = \{a \mid a$ es una persona que vive en México y practica la natación$\}$, $B = \{b \mid b$ es una persona que vive en México, practica la natación y es mujer$\}$.

Observa que cualquier elemento b que pertenece al conjunto B también pertenece al conjunto A, esto es, toda mujer que practica natación y vive en México, es una persona que practica natación y vive en México. ¿Todo elemento del conjunto A es elemento del conjunto B?

Sean A y B conjuntos cuyos elementos pertenecen a un conjunto universal U. Diremos que el **conjunto *B* es subconjunto del conjunto *A*** si, y sólo si, cada elemento de B también es elemento de A; esto se denotará por $B \subseteq A$ o $A \supseteq B$. Cuando $A \subseteq B$, también se dice que "A está contenido en B".

Por otro lado, si B no es subconjunto de A, se denotará por $B \nsubseteq A$. Nota que si $B \nsubseteq A$, existe al menos un $x \in U$ tal que $x \in B$ y $x \notin A$.



Para los conjuntos $A = \{a \mid a$ es una persona que vive en México y practica la natación$\}$ y $B = \{b \mid b$ es una persona que vive en México, practica la natación y es mujer$\}$, tenemos que para todo $b \in B$ se cumple que $b \in A$, por lo tanto, $B \subseteq A$. Sin embargo, $A \nsubseteq B$, puesto que existe al menos un $a \in U$, tal que $a \in A$ y $a \notin B$. Dicho en palabras, hay al menos un hombre que vive en México y practica la natación; por lo tanto, no pertenece al conjunto B.

Observa que para demostrar que un conjunto A no es subconjunto de un conjunto B, se debe demostrar que no todo elemento de A pertenece a B, es decir, se debe encontrar un elemento en A que no pertenezca a B. Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{7,2,3\}$ y $B = \{2,3,4,5,6\}$, como $7 \in A$ y $7 \notin B$, entonces, $A \nsubseteq B$.

Veamos un ejercicio de subconjunto:

Hacer una lista con todos los subconjuntos del conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Solución:

1. Para hacer la lista, se procede de manera ordenada, primero se escriben los subconjuntos sin elementos. Sólo existe uno, el vacío: $\emptyset \subseteq X$.
2. Los subconjuntos de X con un elemento son:
   $\{1\},\{2\},\{3\}$ y $\{4\}$.
3. Los subconjuntos de X con dos elementos son:
   $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}$ y $\{3,4\}$.
4. Tenemos cuatro subconjuntos de X con tres elementos:
   $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}$ y $\{2,3,4\}$.
5. Y sólo existe un subconjunto de X con cuatro elementos, a saber el mismo $X = \{1,2,3,4\}$.
6. En este ejemplo existen 16 subconjuntos de X. Como $X \subseteq X$, a X se le llama subconjunto impropio de X y a $\emptyset$ subconjunto trivial de X.

   Nótese que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Definición. Sean A y B conjuntos cuyos elementos pertenecen a un conjunto universal U. Se dice que ***A* es igual a *B*** si se cumple que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Esto se denotará por $A = B$.

Para demostrar que A y B son iguales, se tiene que probar que todos los elementos de A pertenecen a B, y también que todos los elementos de B pertenecen a A, es decir, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$; si $A \subseteq B$ no se cumple o $B \subseteq A$ no se cumple, se dice que A no es igual a B o A es distinto de B y se denotará por $A \neq B$.

Veamos algunos ejemplos de igualdad de conjuntos:

El conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ es igual al conjunto $B = \{3,1,2,4\}$, ya que todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A. No importa el orden en que se escriban los elementos en cada conjunto.

El conjunto $X = \{a,b,c\}$ es igual al conjunto $Y = \{a,b,c,c,a,b\}$, puesto que todos los elemento de X pertenecen a Y y recíprocamente todos los elementos de Y pertenecen a X. Esto indica que en un conjunto basta con escribir una sola vez cada elemento.

Sean $T = \{2,4,6\}$ y $P = \{2,4,6,8\}$, nótese que todos los elemento de T pertenecen a P, es decir, $T \subseteq P$, pero no todos los elementos de P pertenecen a T, puesto que $8 \notin T$, en consecuencia $P \nsubseteq T$. Por lo tanto, $T \neq P$.

Definición. Sean A y B conjuntos cuyos elementos pertenecen a un conjunto universal U. Se dice que ***B* es un subconjunto propio de *A***, lo que se denotará por $B \subsetneq A$, si se cumple que $B \subseteq A$ y $B \neq A$.

Actividad de desarrollo

Colaboración

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. • **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
ATRIBUTO	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

1. En equipo de tres integrantes, resuelvan lo que se indica:

- Representen en su cuaderno, con la simbología de conjuntos, los siguientes enunciados:

  a. A pertenece al conjunto M.

  b. El conjunto A es subconjunto de B.

  c. En los elementos que pertenecen al conjunto A no están los números pares.

- Completen las proposiciones con los símbolos $\in$ o $\notin$.

  a. 5 ____________ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

  b. 5 ____________ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

  c. 8 ____________ $\{x \in \mathbb{N} | 8 < x < 10\}$

  d. 5.999 ____________ $\{x \in \mathbb{N} | 2 < x < 6\}$

  e. 2 ____________ $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}$

- Determinen cuáles de los siguientes conjuntos son un conjunto vacío y escriban en su cuaderno una explicación del porqué.

  $A = \{x \in R \,|\, x^2 + x + 1 = 0\}$

  $B = \{x \in R \,|\, x < 4 \text{ y } x > 6\}$

  $C = \{x \in R \,|\, x^2 + x - 1 = 0\}$

2. Corroboren entre todos que las respuestas sean las correctas y luego contrástenlas con las de los demás equipos. Si encuentran diferencias lleguen a una conclusión grupal.

JUEGO 2 DIGITAL

Operaciones con conjuntos

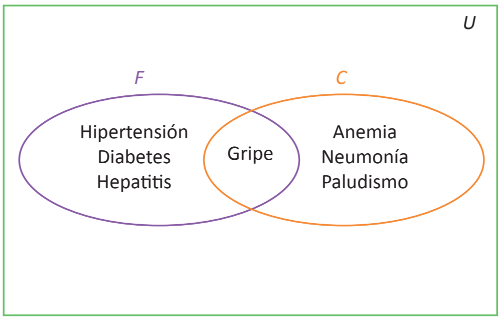
Dado un conjunto universal U, podemos formar otros conjuntos a partir de algunos subconjuntos dados de U, como lo son el **complemento**, la **unión**, la **intersección**, la **diferencia** y el **producto cartesiano**.

Veamos un ejemplo:

En un estudio sobre las enfermedades en dos regiones del país, se encontró la información que aparece en la tabla siguiente, con respecto a las principales enfermedades en la población de cada región.

Región Fría	Región Cálida
Hipertensión	Anemia
Diabetes	Gripe
Gripe	Neumonía
Hepatitis	Paludismo

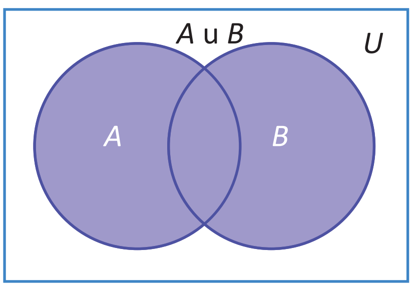
La única enfermedad de mayor incidencia en común a las dos regiones es la gripe. Ahora, si se representan las enfermedades de cada región como un conjunto; entonces, el conjunto de enfermedades con mayor incidencia en la Región Fría del país forman el conjunto F = {*hipertensión, diabetes, gripe, hepatitis*}. Mientras que para la Región Cálida, se tiene C = {*anemia, gripe, neumonía, paludismo*}. Estos conjuntos se pueden representar por medio de un diagrama de Venn, en donde la única enfermedad común a los dos conjuntos es la gripe.



Unión de conjuntos

Definición. Sean A y B subconjuntos de U, la unión de A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B y se denotará por $A \cup B$,

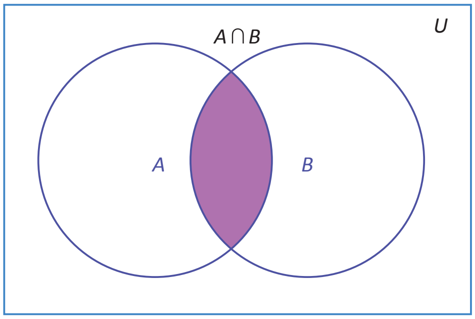
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



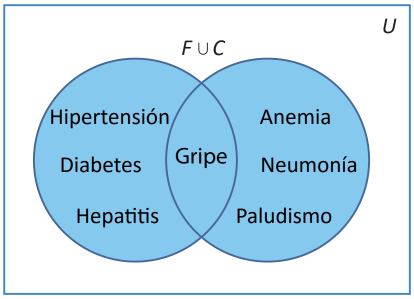
Intersección de conjuntos

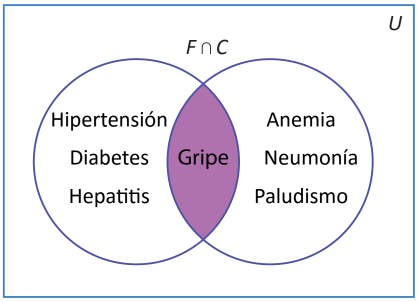
Definición. La intersección de A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B y se denotará por $A \cap B$,

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



En nuestro ejemplo, $F \cup C$ = {*hipertensión, diabetes, gripe, hepatitis, anemia, gripe, neumonía, paludismo*} y $F \cap C$ = {*gripe*}.





Si dos conjuntos no tienen elementos similares, se llaman **disjuntos** y su intersección es el conjunto vacío.

Glosario

Disjuntos: en matemáticas, dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen ningún elemento en común.

Propiedades de la intersección:

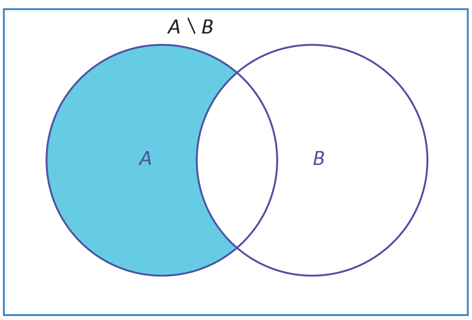
a) Identidad: $A \cap U = A$
b) Idempotencia: $A \cap A = A$
c) Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A$
d) Asociatividad: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
e) Distributividad: $(A \cap B) \cup C = (A \cup D) \cap (B \cup C)$
f) Absorción: $A \cap (A \cup B) = A$
g) Complementariedad: $A \cap A^c = \varphi$

Todo conjunto en el que se hayan definido dos operaciones que tengan las propiedades de la unión e intersección, se le denomina **Álgebra de Boole**.

Diferencia de conjuntos

Definición. Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U, al conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B, se le llamará la **diferencia de *A* y *B*** y se denotará por $A \setminus B$ o $A - B$.

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



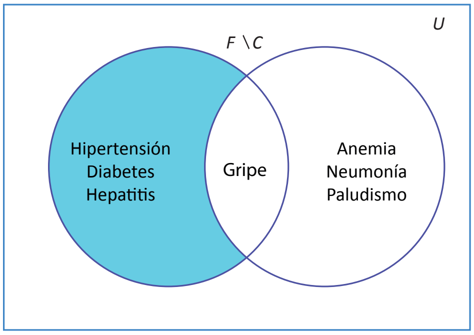
Gráficamente esta área cubre la superficie que A no comparte con B.

Será posible establecer dos conjuntos diferencia cuando se operan dos conjuntos cualesquiera.

Simbología de la diferencia de conjuntos

- El símbolo de la diferencia es: $\setminus$ o $-$.
- La diferencia del conjunto A y el conjunto B se representa como: $A \setminus B$ o $A - B$.
- La diferencia del conjunto B y el conjunto A se representa como: $B \setminus A$ o $B - A$.
- Ambas operaciones arrojan resultados distintos, cuando ambos conjuntos no son iguales: $A \setminus B \neq B \setminus A$ o $A - B \neq B - A$.

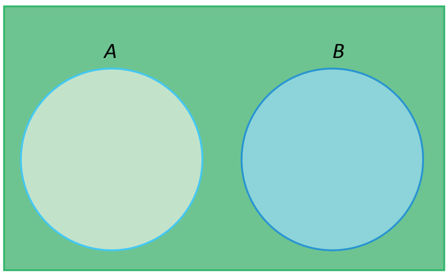
En nuestro ejemplo, $F \setminus C$ = {*Hipertención, Diabetes, Hepatitis*}



Conjuntos disjuntos o ajenos

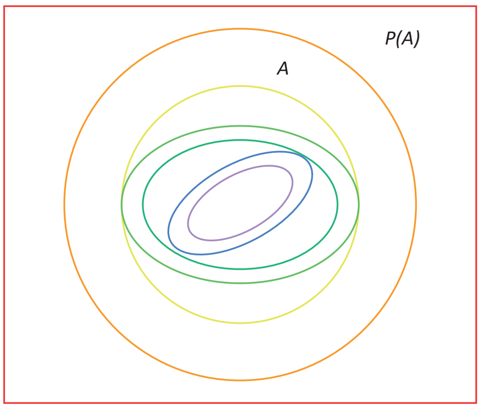
Cuando se tienen dos conjuntos A y B cuya intersección es un conjunto vacío se dice que A y B son conjuntos disjuntos o ajenos.

Si el conjunto A y el conjunto B son disjuntos, entonces, ellos están representados por dos círculos que no se cruzan.



Conjunto potencia

Definición. Sea U un conjunto universal y A un subconjunto de U, podemos construir un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de A, llamado **conjunto potencia** de A, y se denotará por $P(A)$; dicho conjunto no necesariamente es un subconjunto de U.



Ejemplo: Sea $X = \{P,Q,R\}$, entonces $P(X)= \{\emptyset,\{P\},\{Q\},\{R\},\{P,Q\},\{P,R\},\{Q,R\},\{P,Q,R\}$

CURIOSIDADES

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor cuando estudió los conjuntos infinitos fue considerado como una locura matemática. Las acusaciones de blasfemia por parte de la gente que no entendía sus descubrimientos no ayudaron. Llegó a ser internado repetidas veces en hospitales psiquiátricos mientras su mente luchaba contra varias paradojas de su teoría, que parecían invalidarla continuamente.

Actividad de desarrollo

Atención y responsabilidad VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. • **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
ATRIBUTO	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

1. De manera individual, relaciona con una línea los conceptos de la izquierda con la simbología de la derecha:

Conjunto complemento	$A \cup B$
Unión de conjuntos	G^c
Diferencia de conjuntos	$\emptyset$
Conjunto vacío	U
Intersección de conjuntos	$C \cap D$
Universo	$\frac{E}{F}$

2. Resuelve los ejercicios, considerando que si el $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, d, e\}$ y $C = \{a, b, e\}$, entonces:

a. $A \cup B = \{ \quad \}$

b. $A \cup C = \{ \quad \}$

c. $B \cup C = \{ \quad \}$

d. $A \cup B \cup C = \{ \quad \}$

e. $B \cap C = \{ \quad \}$

f. $A \cap B \cap C = \{ \quad \}$

g. $A - B = \{ \quad \}$

h. $B \cap A^c = \{ \quad \}$

i. $A - A = \{ \quad \}$

j. $A^c = \{ \quad \}$

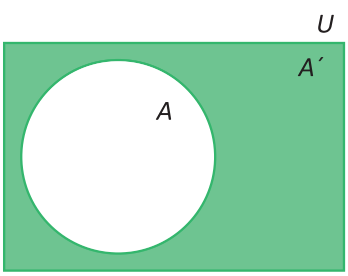
k. $(A \cap C)^c = \{ \quad \}$

3. Comparte tus respuestas con tus compañeros de grupo.

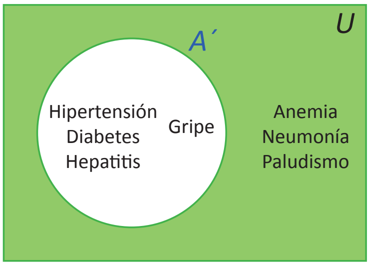
Complemento de un conjunto

Sean U un conjunto universal y A un subconjunto de U. Fijémonos en los elementos que están en U, pero no pertenecen a A. Este conjunto se llamará el **complemento de *A* en** U y se denotará por A'.

$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$.



En nuestro ejemplo, A' = {*anemia, neumonía, paludismo*}.



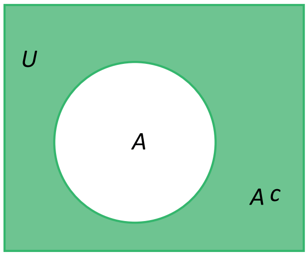
NO ABANDONO

"El razonamiento matemático puede considerarse más bien esquemáticamente como el ejercicio de una combinación de dos instalaciones, que podemos llamar la intuición y el ingenio".

Alan Turing

Definición. El conjunto complemento de A, denotado por A^c, es el conjunto que contiene a todos los elementos del universo, U, que no pertenecen al conjunto A; es decir:

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$



Ejemplo:

a) El complementario del conjunto de todos los hombres es el conjunto de todas las mujeres (hablando de seres humanos).

b) Hablando de números naturales, el complementario del conjunto {1, 5, 6, 7, 8, 10} es el conjunto {2, 3, 4, 9, 11, 12, ...}.

Una propiedad interesante del complemento es que si $A \subset U$ y $B \subset U$, entonces:

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$ de manera que $A - B = A \cap B^c$.

Pero también:

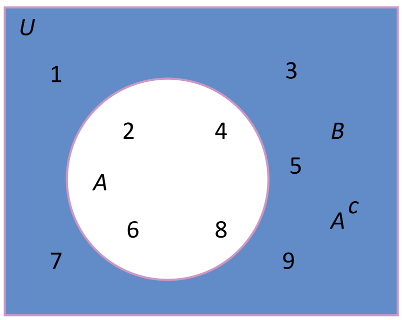
$x \in (A \cap B^c) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in B^c \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B^c \wedge x \notin A^c \Leftrightarrow x \in (B^c - A^c)$.

De tal forma que $A - B = (B^c - A^c)$.

Los elementos del conjunto universo 1, 3, 5, 7 y 9 no están presentes en el conjunto A.

Por comprensión: $A^c = \{ x \mid x \notin A \wedge x \in U\}$ y se lee: el conjunto de elementos x, tal que x no pertenece a A y x pertenecen a U.

Por extensión: $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.



$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Producto cartesiano

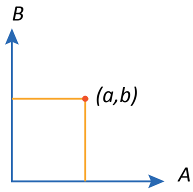
Suponiendo que una persona tiene tres bebidas y dos alimentos para desayunar, digamos: cereal, huevos, jugo, leche y café, ¿cuántas combinaciones con un alimento y una bebida puede formar para desayunar?

Hagamos las combinaciones: cereal y jugo, huevos y jugo, cereal y leche, huevos y leche, cereal y café, huevos y café. Estás son todas las combinaciones posibles que podemos hacer con los alimentos y bebidas. Si $A = \{cereal, huevos\}$ y $B = \{jugo, leche, café\}$, ¿existirá otra manera de relacionar A y B distinta de la unión, intersección o diferencia? La respuesta es sí, para ver cómo los podemos relacionar, veamos la siguiente definición.

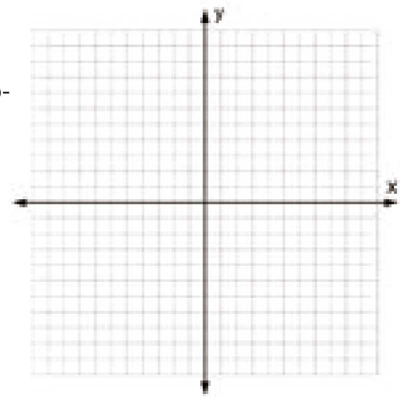
Sean A, B conjuntos y sean $a \in A$, $b \in B$. El conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$ se llama par ordenado y se denotará por (a, b).

Definición. El **producto cartesiano** de A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que a pertenece a A y b pertenece a B y se denotará por $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$



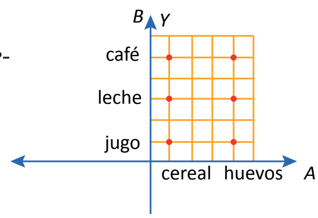
Representación del par ordenado (a, b) en el producto cartesiano $A \times B$.



El producto cartesiano X × Y.

En nuestro ejemplo:

$A \times B$ ={(*cereal, jugo*),(*huevos, jugo*), (*cereal, leche*), (*huevos, leche*), (*cereal, café*), (*huevos, café*)}, cuya gráfica es:



En general $A \times B \neq B \times A$. En nuestro ejemplo:

$B \times A$ = {(*jugo, cereal*), (*jugo, huevos*), (*leche, cereal*), (*leche, huevos*), (*café, cereal*), (*café, huevos*)}.

Nota que la pareja (*leche, huevos*) $\notin A \times B$, puesto que *leche* $\notin A$ y *huevos* $\notin B$. De manera similar la pareja (*huevos, leche*) $\notin B \times A$, puesto que huevos $\notin B$ y leche $\notin A$. Por lo tanto, $A \times B \neq B \times A$.

Sean $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{1, 2, 3\}$. Determine $X \times Y$, $Y \times X$ y grafica.

Álgebra de conjuntos

El **álgebra de conjuntos** es la parte de las matemáticas encargada de estudiar la cantidad en la forma más general posible aplicada ahora a las operaciones con conjuntos y presentadas a manera de leyes.

1. **Leyes de idempotencia:** $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$
2. **Leyes asociativas:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ y
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
3. **Leyes conmutativas:** $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
4. **Leyes distributivas:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. **Leyes de identidad:** $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$ y $A \cup \emptyset = \emptyset$
6. **Leyes de involución:** $(A^c)^c = A$
7. **Leyes de complemento:** $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$, $U^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = U$
8. **Leyes de De Morgan:** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Actividad de desarrollo

Responsabilidad

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. • **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
ATRIBUTO	• Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

1. En equipo de tres integrantes, decidan la estrategia para resolver las siguientes situaciones, elijan un procedimiento y describan en su cuaderno la metodología que seguirán para llegar a la solución en cada una de ellas.

1. En una escuela, de un grupo de 45 alumnos, algunos se han inscrito en los cursos de francés y alemán; si se sabe que 30 estudian francés, 17 alemán y 7 ambos idiomas.

   a. ¿Cuántos estudian únicamente francés?

   b. ¿Cuántos no estudian alemán?

   c. ¿Cuántos francés o alemán?

   d. ¿Cuántos alumnos del grupo no estudian ninguno de esos idiomas?

2. En un sondeo de opinión se entrevistó a 250 personas, se encontró que 65 leen la revista *Proceso*, 46 el periódico *La Jornada* y 63 el periódico *Reforma*. Además, 49 leen ambos *La Jornada* y *Proceso*, 48 ambos *La Jornada* y *Reforma*, y 43 leen los tres.

   a. ¿Cuántas personas leyeron sólo *Reforma*?

   b. ¿Cuántas *La Jornada* y *Proceso*, pero no *Reforma*?

   c. ¿Cuántas personas sólo una opción?

   d. ¿Cuántas personas, ninguna de las tres opciones?

2. Compartan en grupo las diferentes maneras de llegar a los resultados, analizando y explicando cada equipo la metodología empleada.

Aplicación del campo de los números reales

Glosario

Signo gráfico: se refiere al dibujo o esquema simple del número.

Símbolo: es la representación perceptible de una idea.

Logística: conjunto de los medios necesarios para llevar a cabo un fin determinado de un proceso complicado.

Un **número** es un **signo gráfico**, y **símbolo** que representa una cantidad o una magnitud, con él podemos contar, medir, hacer operaciones, pero es muy amplio hacer una definición de manera formal. Sin embargo, se puede decir que un **número real** es un número positivo o negativo que puede o no tener cifras de decimales, finitos o infinitos y puede representarse mediante un punto en la recta de números reales. En este sentido, el teorema fundamental de la geometría analítica, establece que **"a cada número real le corresponde un punto en la recta de los números reales y viceversa"**.

En la antigüedad, los griegos distinguían el estudio de las relaciones entre los números del cálculo práctico con los números. El primer estudio se conoció con el nombre de "aritmética", mientras que el estudio del cálculo recibía el nombre de "**logística**".

El estudio de los números precisa que los sistemas numéricos se trazan empleando lo que se conoce como bases, y estos sistemas numéricos pueden ser: decimal (base 10), binario (base 2), octal (base 8), hexadecimal (base 16) y otros tantos que fueron creados modificando las bases, como el sistema de numeración maya cuya base era 20.
En la actualidad podemos analizar que los sistemas de numeración modernos se caracterizan por ser posicionales, esto es, el valor del símbolo depende de la posición en que se encuentre, por ejemplo:

1 unidades 11 decenas 111 centenas 1111 milésimas

Nociones preliminares

AUDIO 2 DIGITAL

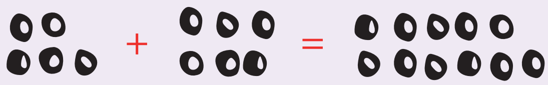
Antes de entrar al aspecto abstracto de los números racionales, conozcamos un poco de historia de los números. Para ello, lee el siguiente texto “La escritura del número”, un fragmento del libro *Los números toltecas: Introducción a las matemáticas vigesimales del México* antiguo del antopólogo Frank Díaz:

La escritura del número

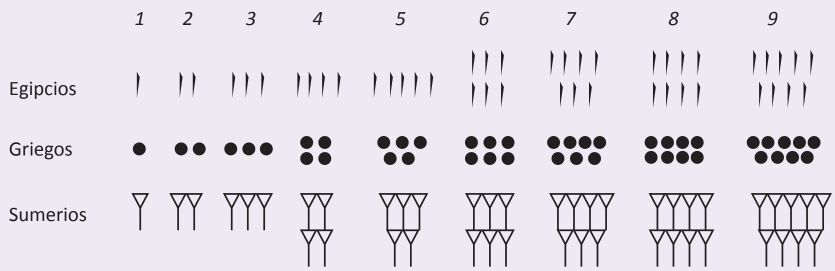
Cuando el ser humano comenzó a escribir números, quizás a comienzos del Paleolítico, la escritura era muy sencilla, pues le bastaba con acumular semillas o palitos hasta llegar a la cantidad deseada. Una semilla valía uno, diez valían diez y así sucesivamente, sin idea del orden por posiciones. De ese modo surgió el primer sistema de representación del número, llamado pictográfico.

A pesar de su primitivismo, esta forma de numeración tenía dos ventajas respecto a la que empleamos hoy:

1. La cantidad se representaba de forma directa. En consecuencia, no era necesario aprender de memoria un conjunto de signos arbitrarios para leerla, pues bastaba con contar sus elementos gráficos.
2. Las operaciones sencillas de cálculo se facilitaban. Por ejemplo, si queremos sumar dos conjuntos de cinco y seis semillas, basta con agruparlos y contar, para saber que tenemos once semillas.



El problema de esta escritura es que, al manejar cantidades elevadas, era necesario acumular muchos puntos, lo cual dificultaba la lectura. Sin embargo, aunque parezca extraño, tal fue el sistema que predominó en las grandes culturas del pasado, como China, Egipto y los primeros tiempos de la India, Grecia y Roma. Incluso los sumerios, quienes lograron desarrollar un sistema de notación por posiciones, continuaron escribiendo las cifras mediante acumulaciones de barras.



La escritura de los números por algunos pueblos del Viejo Mundo hacia el siglo V antes de Cristo.

Con el paso del tiempo, llegó el momento en que los sabios del Viejo Mundo trataron de resolver esta engorrosa situación. Su solución fue escribir los números con símbolos tomados de sus respectivos alfabetos. Por ejemplo, los romanos unieron cinco barras en una “V”, diez barras en una “X”, cincuenta en una “L”, etcétera. Los hebreos, fenicios y griegos hicieron lo mismo. Los hindúes utilizaron las letras de su primitivo alfabeto y las transportaron al sánscrito, donde se convirtieron en signos para las cifras.

De los hindúes tomaron estos signos los chinos y los árabes, quienes los modificaron levemente a fin de adaptarlos a sus respectivas formas de escritura. Finalmente, los árabes transmitieron sus glifos a los europeos.

Esta solución permitía leer la expresión numérica rápidamente, pero complicaba las operaciones de cálculo, pues las formas de las letras eran arbitrarias y no ayudaban a entender la cantidad. Pongamos un ejemplo: nuestro signo para el seis es una espiral, mientras que el dos es como un gancho. ¿Qué sentido tiene unir un gancho con una espiral? Ninguno, excepto si apelamos a una convención arbitraria y definimos que esa combinación equivale a dos globos unidos (el signo del ocho), así: $5 + 3 = 8$.

Ésa es la razón por la cual lo primero que aprenden los niños en las clases de matemáticas no es a razonar, sino a memorizar los guarismos de las cifras, así como las tablas de suma y multiplicación.

La evolución de la escritura del número en **Anawak** fue diferente a la del Viejo Mundo. Al principio, éstos se escribían mediante sucesiones de puntos, pero el sistema resultaba tan incómodo que, hacia el segundo milenio antes de Cristo, los sabios olmecas se plantearon la necesidad de inventar una fórmula más práctica. Pero, en lugar de diseñar un conjunto artificial de signos, estos sabios asumieron el reto de conservar las ventajas de la escritura pictográfica de las cantidades, abreviando al máximo la expresión numérica.

Glosario

Anawak: Anáhuac escrito en ortografía fonética (es la ortografía por el sonido más que por las letras correctas; escribir lo que se escucha como se escucha). Anawak, *el límite del agua*, nombre propio en lengua nawatl de Mesoamérica, la región en la cual se desarrollaron las antiguas culturas de México; incluye los territorios de México, Guatemala, El Salvador, Honduras y parte de Nicaragua.

Su solución fue genialmente simple: transformaron las semillas y palitos de la primitiva notación en puntos y barras, y elaboraron leyes gráficas para la combinación de estos dos elementos. El resultado fue un conjunto de glifos que se pueden descifrar de una mirada y que, al mismo tiempo, expresan su propia cantidad. Así surgió el primer número jeroglífico o sintetizado de la historia.

Los dos elementos mediante los cuales se construyen los números mesoamericanos se llaman grafemas, componentes gráficos. Sus valores son los siguientes:

a) **El punto vale uno.** En los monumentos y códices se representa de dos maneras: cuando aparece aislado, generalmente se dibuja más grande o como un punto dentro de un círculo; cuando se compone con otros puntos o barras, como un punto simple.

b) **La barra vale cinco.** En la antigüedad se dibujaba en forma simple o adornada, según la función del relieve o códice donde estuviera inscrita. A veces, semejaba un atado o paquete, pues la función de la barra consiste en encapsular cinco puntos.

Variantes del uno y el cinco.

Con frecuencia, leemos en los libros de divulgación que los números de barras son de origen maya. Lo cierto es que los mayas, al igual que los demás pueblos de Anawak, heredaron dicho sistema de los olmecas ya completamente desarrollado, y no le añadieron ni le quitaron nada.

1

2

3

1. Sello olmeca con una inscripción calendárica. 2. Inscripción con puntos, barras y caracoles. *Códice Dresden*. 3. Fecha con barras en forma de paquete. *Estela zapoteca*.

La evidencia más antigua del uso de los números olmecas que se ha encontrado hasta hoy, data de hace unos tres mil años y es una fecha inscrita en un sello. Puesto que la aparición de una fecha implica el desarrollo previo del calendario y éste, a su vez, depende de las matemáticas, podemos inferir que los números olmecas tienen un origen anterior a ese sello.

A primera vista, la escritura de puntos y barras parece primitiva en comparación con el sistema indoarábigo que empleamos nosotros. Sin embargo es, de hecho, el sistema más avanzado de representación del número que se haya inventado, por las siguientes razones:

1. **Síntesis glífica.** Una expresión numérica es más eficiente cuanto más sintéticos son sus símbolos, pues ello exige menos esfuerzo para comprenderla. Nosotros tenemos que memorizar diez glifos, numerales diferentes (las nueve cifras y el cero) para leer una cantidad. Los mesoamericanos, en cambio, sólo debían memorizar tres: el punto, la barra y el cero; y, en los cálculos, incluso podían suprimir el cero, pues bastaba con dejar un espacio vacío para aludirlo.
2. **Glifos autodescriptivos.** Al reflejar su propia cantidad, los glifos formados por puntos y barras son muy fáciles de entender. Por ejemplo, hay que estar iniciado en la lectura del sistema indoarábigo para saber que un cuatro es un cuatro; pero, hasta el más lego en la materia reconocería un cuatro que está formado por cuatro puntos. Por lo tanto, el estudiante de Anawak no se veía obligado a descifrar las formas de las cifras, lo cual facilitaba el aprendizaje de las matemáticas.
3. **Cifras estructurales.** La característica más destacada de estos números, es que la cifra posee una estructura interna. En ese aspecto, son diferentes de las nuestras, constituidas por glifos simples.

Esto tenía una enorme ventaja para el cálculo [...] Por sus valores, llamaremos al sistema de puntos y barras "escritura racional o científica".

Frank Díaz "*Los números toltecas: Introducción a las matemáticas vigesimales del México antiguo*", Kinames, 2008, pp. 31-33.

Actividad de desarrollo

Respeto a las culturas originarias

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

ATRIBUTO

- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.

1. En pareja, vuelvan a leer el texto "La escritura del número" y subrayen las ideas principales.
2. Contesten en su cuaderno las preguntas:
   - ¿En qué consistía la primitiva representación del número?
   - ¿Qué ventajas tiene la representación pictográfica del número?
   - ¿Qué característica común tiene la representación de los números entre las civilizaciones del Viejo Mundo?
   - ¿Por qué fue desechado este tipo de escritura del número en la mayoría de los pueblos?
   - ¿Por qué es preciso memorizar tablas de multiplicación en el sistema numérico indoarábigo?
   - ¿Cuál fue el reto que asumieron los olmecas en la escritura de las cantidades?
   - ¿Cómo resolvieron los sabios olmecas la representación de los números?
   - ¿Qué son los grafemas numéricos?
   - ¿Cuándo aparece en los registros la escritura olmeca de los números?
   - ¿Por qué se afirma que la escritura de puntos y barras es más sintética que la indoarábiga?
   - ¿Qué ventajas tiene el hecho de que los números toltecas describan su propia cantidad?
3. Compartan sus respuestas con sus compañeros y elaboren una conclusión general de un párrafo.

CURIOSIDADES

"El interés de los mesoamericanos en las matemáticas propició la construcción de herramientas que facilitaron las operaciones de cálculo, entre las cuales podemos mencionar las siguientes:

- El *Nepowaltsitsin*, calculador, una cuerda de la cual colgaban hilos de diversos colores donde se apuntaban las cantidades a través de nudos.
- El *Mekatlapoalli*, cuerda de cálculo, una cuerda con nudos que permitía medir distancias. Su nombre indica que también servía para calcular, probablemente proporciones o triangulaciones. Los incas también conocieron este instrumento, al que llamaron Quipu. Según los cronistas, con él podían contar, calcular, llevar estadísticas, e incluso escribir relatos y poemas.
- El *Witoliu'kanepanolli*, rosario. No está claro qué tipo de instrumento era éste, pues no ha dejado huellas arqueológicas; sin embargo, el ingeniero David Esparza Hidalgo (quien le llama *Nepowaltsitsin*) afirma que se trababa de un ábaco vigesimal. Operaciones realizadas en la actualidad con dicho ábaco, demuestran que su eficacia es comparable a la de nuestras calculadoras electrónicas.

Donde más se evidencia el alcance de aquellos números es en el calendario de Anawak, verdadero prodigio del intelecto humano. Este mecanismo, basado en las posibilidades de combinación de los conjuntos de números y signos, motivó que las matemáticas toltecas se desarrollaran en un sentido distinto de las nuestras, pero no menos refinado.

A través del calendario, los números penetraron en la cosmogonía y la religión de los toltecas, como se ve en el hecho de que las funciones del matemático-astrónomo se unieron con las del sacerdote, pues su objeto de estudio (los números y los ciclos) se entendía como la expresión de la conciencia divina. Por ello, afirma un texto indígena: "Quienes calculan cómo cae un año, cómo sigue su camino la cuenta de los días, (cuándo) cae cada una de sus veintenas, quienes de esto se ocupan, a ellos les corresponde hablar de los dioses". (Informantes de Sahagún, *Coloquio de los Doce*)".

Fuente: Frank Díaz, *Los números toltecas: Introducción a las matemáticas vigesimales del México antiguo*, Kinames, 2008, pp. 31-33.

TIC

Descarga en PDF el libro completo de Frank Díaz *Los números toltecas: Introducción a las matemáticas vigesimales del México antiguo*, una verdadera joya de conocimiento sobre nuestras raíces que está a tu disposición. Léelo y analízalo con atención, su contenido sobre los números toltecas te abrirá un horizonte de conocimiento para comprender el calendario, los ritos ceremoniales prehispánicos y muchos otros aspectos de la cosmogonía de nuestra cultura madre.

http://faces.unah.edu.hn/arqueo/images/stories/docs/Documentos_en_Linea/Numeracion.pdf

Actividad de desarrollo

Análisis

VALORES

TIC

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales. • **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
ATRIBUTO	• Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.

1. Dividan al grupo en cinco equipos para que investiguen en internet, enciclopedias y libros la historia y características de los números:
   - Toltecas
   - Mayas (para los números toltecas y mayas descarguen en internet el PDF del libro completo *Los números toltecas: Introducción a las matemáticas vigesimales del México antiguo* de Frank Díaz: http://faces.unah.edu.hn/arqueo/images/stories/docs/Documentos_en_Linea/Numeracion.pdf).
   - Babilónicos
   - Egipcios
   - Romanos
2. Elaboren una presentación en PowerPoint del tema que les haya tocado y organicen la exposición grupal.
3. De manera individual, redacta una conclusión de cómo los números están presentes en las actividades diarias de todas las civilizaciones desde la antigüedad hasta nuestros días.

Los números reales

Los números reales son los que se pueden escribir con decimal, incluyendo aquellos que necesitan una expansión decimal infinito. El conjunto de los números reales contiene todos los números enteros, positivos y negativos, todas las fracciones y todos los números irracionales, de los cuales explicaremos en qué consisten cada uno más adelante:

Ejemplos:

Números decimales: 0.20, 0.3456789, 0.77777
Números naturales: {1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 …}
Números enteros positivos: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
Números enteros negativos: {–1, –2, –3, –4, –5, –6, –7, –8, –9, –10, –11}
Cero: 0

Números fraccionarios: $\frac{2}{3}, \frac{1}{8}, \frac{17}{30}, \frac{8}{7}$

Números racionales: .125 y $\frac{1}{8}$, .5 y $\frac{1}{2}$, 0.85 y $\frac{17}{20}$

Números irracionales: $\pi = 3.14159265358979323846\ldots$
$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097\ldots$

Los números reales se clasifican en **racionales** e **irracionales**.

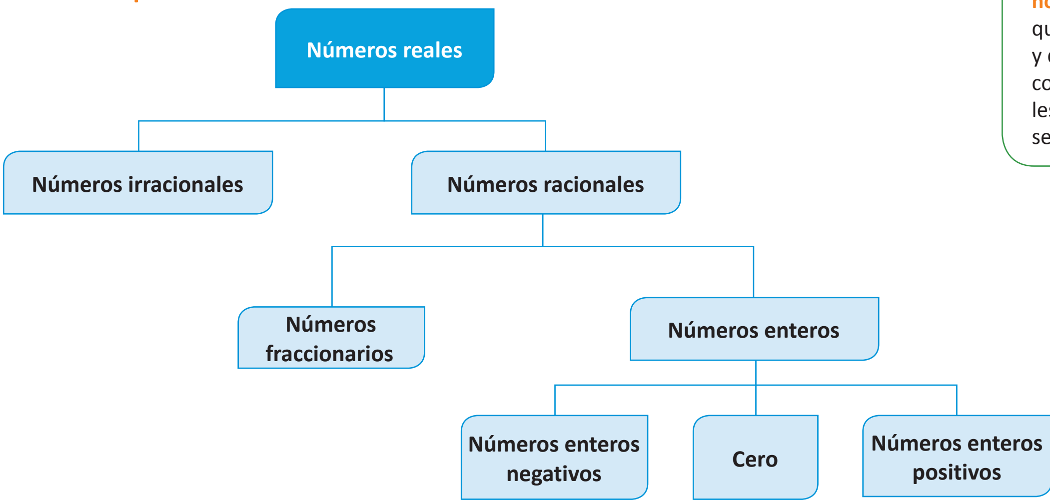
Un **número racional** es aquel que se puede expresar como el cociente de $\frac{a}{b}$ de dos números enteros a y b con b diferente de cero.

Los números reales que no son racionales se **llaman irracionales**, porque no se puede escribir en forma de **razón** (o fracción).

Por ejemplo: la razón del perímetro de una circunferencia a su diámetro es irracional. Este número irracional está denotado por π y se escribe π=3.1416 para indicar que π es aproximadamente igual a 3.1416.

Otro ejemplo de número irracional es $\sqrt{2}$. Los números irracionales se pueden representar por expresiones **decimales infinitos**. Por ejemplo, realizando la división $\frac{177}{55}$ puede verse que la representación decimal es 3.2181818... en donde los dígitos 1 y 8 se repiten indefinidamente.

Los números irracionales pueden también representarse por **expresiones decimales infinitas no periódicas.**



Glosario

Expresiones decimales infinitas: número racional que tiene un periodo, es decir, son cifras que se repiten indefinidamente en su expansión decimal. Este periodo puede constar de una o varias cifras, como: 1.3333; 142857142857.

Expresiones decimales infinitas no periódicas: son expresiones que no muestran parte periódica y que son infinitas, también se les conoce como números irracionales, ya que no se puede seguir una secuencia en su parte decimal.

Números naturales

AUDIO 3 DIGITAL

Este conjunto se caracteriza por que está formado por todos los números enteros positivos que generalmente empleamos para contar objetos cosas de nuestro entorno natural, este conjunto empieza en el uno, hasta números tan grandes que podemos considerar infinitos, generalmente este conjunto lo representamos por la letra $\mathbb{N}$, es decir:

$$\mathbb{N} = \{ 1,2,3,4,5,6,7,..........\infty \}$$

Con los números naturales se cuentan los elementos de un conjunto (condición de número cardinal); o bien, se expresa la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (condición de número ordinal).

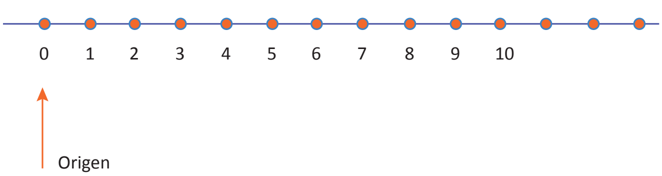
Generalmente los números naturales deben estar ordenados, esto nos permite comparar dos números naturales, es decir:

5 > 3 ; *esto indica que* 5 *es mayor que* 3.

3 < 5 ; *esto indica que* 3 *es menor que* 5.

Anteriormente mencionamos que los números naturales son ilimitados, entonces, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro número natural.

La representación de los números naturales se puede realizar a través de una recta numérica en donde los números estarán ordenados de menor a mayor. Sobre la recta señalamos un punto, que marcamos con el número de origen (para comodidad y referencia empleamos el cero). A la derecha del cero, y con las mismas separaciones, situamos de menor a mayor los números naturales: 1, 2, 3...



CURIOSIDADES

Los matemáticos de la India, en el siglo VII, usaban los números negativos para indicar deudas.

Resumen: el conjunto $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ de los números naturales es el primer conjunto en el que empezamos a relacionar sus elementos por medio de operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división. Podemos relacionar a los elementos de N por medio de una relación de orden $<$ la de ser "menor que". Esta relación satisface las siguientes propiedades: Sean n, m y $l \in \mathbb{N}$

$n < m$ o $n = m$ o $m < n$.

Si $n < m$ y $m < l$, entonces $n < l$.

Si $n < m$, entonce $n + l < m + l$.

Ejemplo:

$5 < 8$.

$8 \not< 5$ y $5 \neq 8$.

Como $34 < 67$ y $67 < 243$, entonces, $34 < 243$.

Como $51 < 73$, entonces $63 = 51 + 12 < 73 + 12 = 85$.

Nota que 1 es el menor elemento o mínimo de $\mathbb{N}$ y que cualquier subconjunto N de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

Ejemplo:

Sea $N = \{45, 34, 123, 509, 2\,371, 100\,001\}$, donde el mínimo es 34.

AUDIO 4 DIGITAL

Números enteros

El conjunto de todos los números naturales está formado por el subconjunto de los números naturales, sus opuestos y el cero.

Sea el conjunto $\mathbb{Z} = \{...-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

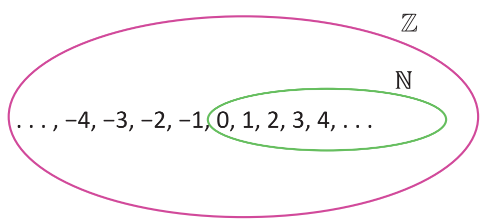
Básicamente los números enteros se dividen en 3 partes:

El conjunto de números enteros positivos = $\mathbb{Z}^+$

El conjunto de números enteros negativos =$\mathbb{Z}^-$

Y el conjunto formado por el cero = $\{0\}$

Por lo tanto, los números enteros serían $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, y los números naturales son un subconjunto de los números enteros.



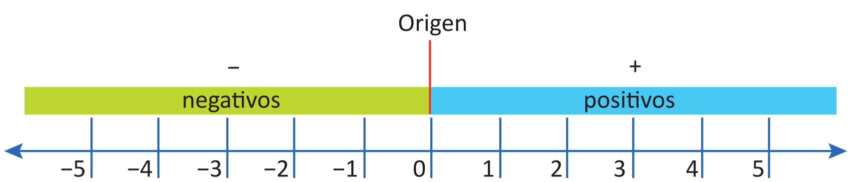
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Una característica importante de este conjunto, es que los números enteros son aquellos que no tienen parte decimal (es decir, que 3.28 no es un número entero). El símbolo que nos sirve para representar a este conjunto es $\mathbb{Z}$, es decir:

$$\mathbb{Z} = \{ -\infty,........,-3,-2,-1,0,1,2,3,.........,\infty\}$$

Los números enteros negativos tienen diversas aplicaciones prácticas, por ejemplo, nos permiten señalar una temperatura bajo cero o una profundidad bajo el nivel del mar. Debemos tener en cuenta que los números enteros son el resultado de las operaciones básicas como la suma y resta, por lo que su utilización se remonta a la antigüedad. Los matemáticos hindúes del siglo VI ya visualizaban la existencia de números negativos.

Es común que los números enteros los representemos en una recta numérica para su mayor objetividad, de esto tenemos que:



Supón que queremos resolver la siguiente ecuación $y + 10 = 7$, sin duda alguna, la solución no es un número natural, puesto que la igualdad se cumple sólo cuando $y = -3$. De la necesidad de resolver ecuaciones de este tipo surge el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Al subconjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3,\ldots\}$ de $\mathbb{Z}$ se le conoce como el conjunto de números positivos y al subconjunto $\mathbb{Z}^- \{-1, -2, -3,\ldots\}$ de $\mathbb{Z}$ se le conoce como el conjunto de números negativos; en ocasiones, a los números positivos se les antepone el signo +, por ejemplo: +21 o +410. Dado que el conjunto de los números enteros contiene números negativos, es razonable preguntarnos cómo relacionaremos estos números con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Pero antes veamos el siguiente concepto.

Intuitivamente el **valor absoluto de un número entero** *m* es el número de unidades que hay del cero a *m* sin considerar si es positivo o negativo; por ejemplo, el valor absoluto de –35 es 35 y el valor absoluto de 97 es 97. Dicho formalmente:

El **valor absoluto** de un número *m* es *m* si *m* es mayor o igual a cero y es –*m* si *m* es menor o igual a cero.

Ahora daremos ciertas reglas para relacionar números enteros:

1. Si tenemos dos números enteros con signos distintos se restan y se antepone el signo del que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplo:

Para $-13 + 4$, primero restamos $13 - 4 = 9$, como el número de mayor valor absoluto es 13 anteponemos su signo al resultado de la resta –9. Así, $13 - 4 = -9$.

Para $-6 + 18$ primero restamos $18 - 6 = 12$, como el número de mayor valor absoluto es 18, anteponemos su signo al resultado de la resta +12, o bien, 12 simplemente. Así: $-6 + 18 = 12$.

2. Si tenemos dos números enteros con los mismos signos se suman y se antepone el signo de ambos números.

Ejemplos:

Para $-5 - 11$, primero sumamos $5 + 11 = 16$ y anteponemos el signo de ambos números al resultado de la suma –16. Así: $-5 - 11 = -16$.

Para $34 + 56$, primero sumamos $34 + 56 = 90$ y anteponemos el signo de ambos números al resultado de la suma + 90 o simplemente 90. Así: $34 + 56 = 90$.

3. El signo + antes de un paréntesis no les cambia el signo a los número que estén dentro de éste.

Ejemplo:

$+ (-4 + 6 - 11) = -4 + 6 - 11 = -15 + 6 = -9$ o $+ (-4 + 6 - 11) = + (-15 + 6) = + (-9) = -9$.

4. El signo – antes de un paréntesis les cambia el signo a los números que estén dentro de éste.

Ejemplo:

$- (2 - 29 + 7) = -2 + 29 - 7 = -9 + 29 = 20$, o $- (2 - 29 + 7) = - (9 - 29) = - (-20) = 20$.

5. El producto de dos con el mismo signo es positivo; recuerda que el producto es el resultado de una multiplicación.

Ejemplos:

$(15) \cdot (4) = 60$ y $(-21) \cdot (-2) = 42$.

6. El producto de dos números con signos distintos es negativo.
   Ejemplos: $(-5) \cdot (82) = -410$ y $(97) \cdot (-8) = -776$.

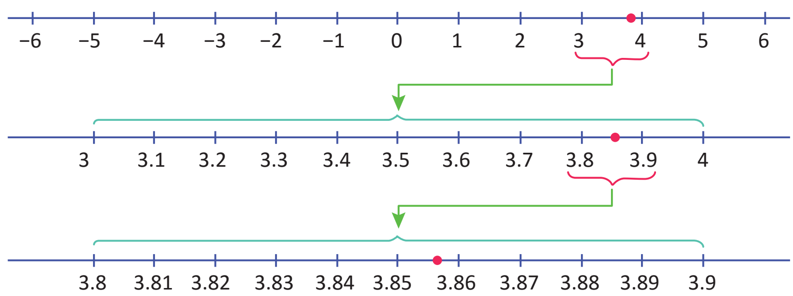
CURIOSIDADES

La palabra "cero" deriva probablemente de "*zephirum*", forma latinizada del árabe "*sifr*" que es, a su vez, una traducción de la palabra hindú "*sunya*" que significa vacío o nada.

Números racionales

AUDIO 5 DIGITAL

Con base en la definición de los dos conjuntos anteriores, se dice que los números racionales conforman el conjunto de números fraccionarios y números enteros representados por medio de fracciones, es decir, como la división de dos enteros. A este conjunto los podemos situar en la recta numérica, pero a diferencia de los números naturales que son consecutivos; por ejemplo, a 6 le sigue 7 y a éste, a su vez, le sigue el 8, y los números negativos cuya consecución se da de manera que –10 le sigue –9 y a éste, a su vez, le sigue –8; los números racionales no poseen consecución pues entre cada número racional pueden existir infinitos números que sólo podrían ser escritos de forma indefinida.



CURIOSIDADES

Los números naturales (1, 2, 3, ...) tiene tantos elementos como los números racionales

$(1, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, ...)$.

Esto es curioso porque al final resulta que el conjunto de los números racionales no es tan “grande” como pudiese parecer. Aunque parezca que hay más racionales que enteros, no es así.

Pinterest.com.

Todos los números fraccionarios son números racionales, y a su vez, sirven para representar medidas. En algunas ocasiones, resulta más conveniente expresar un número de esta manera, que convertirlo a decimal exacto o periódico, debido a la gran cantidad de decimales que se podrían obtener.

Los números enteros son considerados números racionales por el hecho de que se puede obtener un cociente entre el número entero y el número 1 como denominador. El conjunto de los números racionales se denota con la letra $\mathbb{Q}$, que proviene de la palabra anglosajona “*Quotient*” cuya traducción literal significa “*cociente*”, y que sirve para recogerlos como subgrupo dentro de los números reales y junto a los números enteros.

Una característica de los racionales, por ejemplo, es: el número racional puede ser expresado de diferentes maneras, sin alterar su cantidad mediante fracciones equivalentes, así por ejemplo $\frac{1}{2}$ se expresa como $\frac{2}{4}$ o $\frac{4}{8}$, debido a que éstas son fracciones reducibles y nos originan el mismo valor. Por otro lado, existe una clasificación de los números racionales dependiendo de su expresión decimal, y ésta es:

1. **Números racionales limitados**: se presentan cuando su representación decimal tiene un número determinado y fijo de cifras, por ejemplo $\frac{1}{8}$ es igual a 0.125.
2. **Números racionales periódicos**: en éstos sus decimales tienen un número ilimitado de cifras, que siguen un patrón definido. Al mismo tiempo, los números racionales periódicos se dividen en dos:
   - **Periódicos puros**: en donde el patrón se encuentra inmediatamente después del punto decimal, por ejemplo 0.6363636363... y
   - **Periódicos mixtos**: en los cuales el patrón se encuentra después de un número determinado de cifras, por ejemplo 5.48176363636363...

Números fraccionarios

Una **fracción** o **número fraccionario** es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad; es decir, que representa un cociente no efectuado de números.

El conjunto matemático que contiene a las fracciones es el conjunto de los números racionales, denotado $\mathbb{Q}$.

Numerador y denominador

Las fracciones se componen de dos partes, el numerador y denominador junto con una línea divisora entre ambos. En una fracción $\frac{a}{b}$ el denominador “*b*" expresa la cantidad de partes iguales que representan la unidad, y el numerador “*a*" denota cuántas de ellas se toman.

Ahora tratemos de resolver la siguiente ecuación $-3x = 104$, como la única solución es $x = -\frac{104}{20}$, es claro $x \nexists \mathbb{N}$ y x $\mathbb{Z}$. El conjunto en el cual tiene solución nuestra ecuación es el de los números racionales $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b}$ I $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0\}$. $\mathbb{Q}$ contiene a las **fracciones**, recuerda que una fracción es el resultado de dividir un entero en n partes iguales partes iguales, donde $n \in \mathbb{N}$.

Notación y convenciones

En una fracción, el denominador se lee como **número partitivo**. Por ejemplo: $\frac{7}{8}$ y se lee "siete octavos", $-\frac{1}{9}$ se lee "menos un noveno".

En una fracción, si el numerador y el denominador son números negativos, entonces, $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. Por otro lado, si el numerador es positivo y el denominador es negativo, entonces: $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$. Similarmente si el numerador es negativo y el denominador es positivo, entonces $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$.

Una fracción genérica $\frac{a}{b}$ representa el producto de a por el **número recíproco** (multiplicativo) de b, de tal modo que $\frac{a}{b} = a * \frac{1}{b}$; si tanto a como b son números negativos $\frac{-a}{-b}$, el producto es positivo, por lo que se escribe: $\frac{a}{b}$.

Toda expresión matemática escrita en esta forma recibe el nombre de "**fracción**".

La expresión genérica $\frac{a}{b}$ representa una división algebraica, por lo que el divisor debe ser distinto de cero ($b \neq 0$); el cociente de esta división admite un desarrollo decimal que puede ser finito o infinito **periódico**.

Una fracción común representa un número racional, por lo que las fracciones comunes heredan todas las propiedades matemáticas de los racionales.

Clasificación de las fracciones según la relación entre el numerador y el denominador:

- **Fracción propia,** fracción en la cual el denominador es mayor que el numerador.

Ejemplos: $\frac{8}{100}, \frac{3}{14}$ y $\frac{2}{9}$.

- **Fracción impropia,** fracción en la cual el numerador es mayor que el denominador.

Ejemplos: $\frac{24}{5}, \frac{45}{4}$ y $\frac{37}{11}$.

- **Fracción mixta,** es la suma abreviada de un entero y una fracción propia.

Ejemplos: $-5\frac{2}{6}$ y $10\frac{18}{42}$.

- **Fracción reducible,** fracción en la cual el numerador y el denominador no son primos entre sí y puede ser simplificada.

Ejemplos: $\frac{16}{12}, \frac{22}{77}$ y $\frac{260}{48}$.

- **Fracción irreducible,** fracción en la cual el numerador o el denominador son primos y por tanto no puede ser simplificada.

Ejemplos: $\frac{19}{7}, \frac{5}{11}$ y $\frac{2}{3}$.

Glosario

Fracción: del vocablo latín *fractus*, *fractio –õnis*: "roto" o "quebrado".

Número partitivo: o fraccionario, expresa cantidades a partir de las fracciones o partes en que se divide una unidad.

Número reciproco: es el relacionado con otro de manera que cuando estos dos números se multiplican entre sí su producto es 1.

Número periódico: es un número racional caracterizado por tener un periodo (cifras que se repiten indefinidamente) en su expansión decimal. Este periodo puede constar de una o varias cifras.

Clasificación de fracciones según la escritura del denominador:

- **Fracción equivalente**, es la que tiene el mismo valor que otra dada.

Ejemplos: $\frac{5}{6} = \frac{25}{30} = \frac{60}{72}$.

- **Fracción homogénea**, son fracciones que tienen el mismo denominador.

Ejemplos: $\frac{3}{12}$ y $\frac{37}{12}$, $\frac{7}{42}$ y $\frac{12}{42}$.

- **Fracción heterogénea**, son fracciones que tienen diferentes denominadores.

Ejemplos: $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{10}{9}$.

- **Fracción decimal**, fracción en la cual el denominador es una potencia de diez.

En general: $\frac{a}{10n}$, donde a un número entero positivo y n un número natural.

Ejemplos: $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{1\,000}$ o $\frac{7}{100\,0000}$.

Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{c} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Multiplicación de fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

División de fracciones:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Proporciones

Una **razón** es la comparación de dos cantidades.

Ejemplo:
Supón que por cada 10 hombres que usan tenis hay 3 mujeres que también usan tenis.

Diremos que la razón de mujeres a hombres que usa tenis es de 3 a 10 y se escribe $\frac{3}{10}$ o 3 : 10.

Y viceversa, la razón de hombres a mujeres que usan tenis es de 10 a 3 y se escribe $\frac{10}{3}$ o 10 : 3.

Ejercicios:

1. Rogelio compró 25 metros de cable para poner un foco en su terraza por 178.36 pesos. ¿Cuál es el costo por metro?

   Solución. Basta con poner la razón de las cantidades y dividir, $\frac{\$178.36}{25\ m}$ o equivalentemente $\frac{\$7.13}{1\ m}$. Por lo tanto, el costo por metro es de 7.13 pesos.

2. Víctor y su primo Luis han juntado sus domingos para comprar una consola de videojuegos que cuesta 6 000 pesos. Luis ahorró 2 400 pesos y Víctor 3 600 pesos. ¿Cuál es la razón de Víctor a Luis y qué parte del costo de la consola ha puesto cada uno?

Solución. La razón de Víctor a Luis es de $\frac{\$3\,600}{\$2\,400}$ o equivalentemente $\frac{3}{2}$, lo que significa que por cada 3 pesos ahorrados por Víctor, Luis ahorro 2 pesos. Calculemos la parte que ha puesto cada uno respecto al costo de la consola; puesto que el costo de la consola es de 6 000 pesos, tenemos las siguientes razones $\frac{\$3\,600}{\$2\,400} = \frac{3}{5}$ y $\frac{\$2\,400}{\$6\,000} = \frac{2}{5}$; lo que nos dice que Víctor ha puesto $\frac{3}{5}$ del costo y Luis ha puesto $\frac{2}{5}$ del costo.

3. Don José Luis quiere premiar a sus dos hijos por obtener buenas calificaciones repartiéndoles 7 000 pesos. El que obtenga menor promedio, recibirá $\frac{4}{7}$ de lo que recibirá el de mejor promedio. ¿Cuánto le tocará a cada uno de sus hijos?

Proporción directa

Una proporción es una igualdad entre dos razones, $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ y se lee "*x* es a *y* como *z* es a *w*".

Ejercicios:

1. Si el precio de 13 tacos es de 178 pesos, ¿cuál es el precio de 7 tacos?
   Solución. Según la información dada, 13 tacos es a 7 tacos como 178 pesos es a *p* pesos.

   Haciendo la proporción obtenemos $\frac{13}{7} = \frac{178}{p}$, despejando *p* se tiene que:

   $p = \frac{(178) \cdot (7)}{13} = \frac{1246}{13} = 95.85.$

   Por lo tanto, 7 tacos cuestan 95.85 pesos.

2. A Miguel le gustan los videojuegos, en el juego de la "Cucaracha loca" ha logrado 7 314 puntos en 8 minutos. Supón que su juego es constante, ¿cuántos minutos ha jugado si ha obtenido 29 615 puntos?
   Solución. Tenemos que 7 314 puntos es a 29 615 puntos como 8 minutos es a *m* minutos. Entonces $\frac{7\,314}{29\,615} = \frac{8}{m}$, lo cual implica $m = \frac{(29\,615) \cdot (8)}{7\,314} = \frac{236\,920}{7\,314} = 32.39.$

   Por lo tanto, Miguel ha jugado 32 minutos 39 segundos.

3. Cataly ha viajado a Noruega, al llegar a Oslo ha cambiado 180 dólares y le han dado 1 500 coronas noruegas. ¿Cuántas coronas le darán por 270 dólares?
   Solución. Observa que 1 500 coronas es a 180 dólares como *c* coronas es a 270 dólares. Entonces $\frac{1\,500}{180} = \frac{c}{270}$, por consiguiente, $c = \frac{(1\,500) \cdot (270)}{180} = \frac{40\,500}{180} = 2\,250.$

   Por lo tanto, a Cataly le darán 2 250 coronas noruegas por 270 dólares.

Proporción inversa

1. Si 23 albañiles construyen una casa en 11 días, ¿en cuántos días la construirán 31 albañiles?

   Solución. La proporción directa es $\frac{23}{31} = \frac{11}{y}$, haciendo la inversión se obtiene:

   $\frac{23}{31} = \frac{y}{11}$, lo que implica $y = \frac{(23) \cdot (11)}{31} = \frac{253}{31} = 8.16.$

   Por lo tanto, 31 albañiles construirán la casa en 8 días.

2. En una tienda de equipamiento fotográfico se imprimen 1 091 fotos en 47 minutos usando 7 máquinas de impresión. Debido al uso excesivo de las máquinas se descompusieron 3 de ellas. ¿En cuánto tiempo se imprimirán las 1 091 fotos con las máquinas restantes?

Solución. La proporción directa es $\frac{7}{4} = \frac{47}{x}$, haciendo la inversión se obtiene $\frac{7}{4} = \frac{x}{47}$, lo que implica $x = \frac{(47) \cdot (7)}{4} = \frac{329}{7} = 82.25$.

Por lo tanto, cinco máquinas imprimirán 1 091 fotos en 82 minutos 25 segundos.

Números irracionales

Los **números irracionales** son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas. De este modo, puede definirse al número irracional como un decimal infinito no periódico. En general, toda expresión en números decimales es sólo una aproximación en números racionales al número irracional referido. Veamos:

Al dividir entre sí dos números naturales o enteros, el resultado no permite ser expresado como fracción, su característica es que la cantidad de decimales es infinita, es decir, nunca se acaban sus decimales, así es que no se pueden expresar como cociente de dos números naturales o enteros. Éstos son los llamados **números irracionales**.

Podemos asumir que un número irracional es un número no racional; es decir, que no se puede expresar en forma fraccionaria. No debemos confundir estos números con los números racionales, debido a que éstos son números decimales finitos, infinitos **periódicos** e infinitos semiperiódicos que sí pueden transformarse en una fracción, por ejemplo: $\frac{18}{5}$ que es igual a 3.6, por lo tanto, es un número racional a diferencia de la raíz cuadrada de 2 en cuyo resultado se obtienen infinitos decimales, y su fraccionamiento resulta imposible.

Glosario

Periódicos: que suceden, aparecen o se realizan con intervalos regulares de tiempo o con cierta frecuencia.

En general, cualquier número de la forma $\sqrt{\alpha}$ inexacta será un número irracional, donde $\alpha \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q}$.

El conjunto de los números irracionales lo simbolizaremos por $\mathbb{Q}'$. A este conjunto pertenecen todos los números decimales infinitos puros, es decir, aquellos números que no pueden transformarse en una fracción.

Entonces, un número irracional es todo número decimal infinito no periódico. El conjunto de los números irracionales se define por comprensión como:

$$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \textit{ tiene un desarrollo infinito no periódico}\}$$

Actividad de desarrollo

Responsabilidad

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. • **Disciplinar:** 9. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
ATRIBUTO	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

TIC

1. De manera individual, con la información analizada hasta el momento, construye en un documento de Word un cuadro comparativo en el que especifiques las características, diferencias y ejemplos de los conjuntos numéricos estudiados.
2. Comparte y compara tu cuadro con tus compañeros y agrega o modifica lo que te haya hecho falta.

Conoce la historia de cómo se descubrieron los números irracionales en la siguiente lectura.

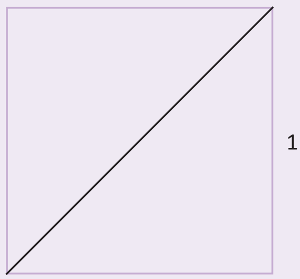
La muerte de Hipaso

La historia que vamos a contar se desarrolla en torno al siglo V a.C. en la antigua Grecia y los protagonistas son los pitagóricos. Esta secta de matemáticos/filósofos (huelga decir que en aquella época matemático y filósofo era prácticamente lo mismo) era muy peculiar, tanto en lo que se refiere a sus creencias como en lo que se refiere a sus costumbres. Podemos decir que su figura principal es Pitágoras, aunque en realidad no se sabe a ciencia cierta si este personaje existió en realidad.

Hemos dicho que los protagonistas de la historia que nos ocupa son los pitagóricos, pero en realidad el protagonista principal es, por razones que veremos más adelante, uno de ellos: **Hipaso de Metaponto**.

Los pitagóricos tenían la firme creencia que todo el Universo podía ser explicado con números. Pero ¿con qué números? Pues con números naturales, esto es, 1, 2, 3, ..., y con las fracciones que pueden formarse con ellos, es decir, $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \ldots$. En cierto modo puede ser una creencia lícita y hasta cierto punto razonable (recordemos que estamos en la antigua Grecia), pero que **a la postre** les salió *rana*.

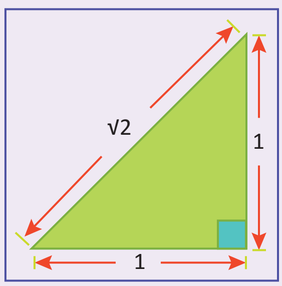
Y, según cuenta la leyenda, Hipaso fue el *culpable* (si se me permite utilizar este calificativo) de ello. Al parecer Hipaso se planteó el problema de medir la diagonal de un cuadrado utilizando el lado como unidad de medida. Por plantear el problema de la forma más simple posible, tomemos un cuadrado de lado 1. En esta situación la pregunta que según parece se realizó Hipaso fue: ¿cuánto mide la diagonal de este cuadrado?



medida de la diagonal = 1.414213562373095...

Teniendo en cuenta la condición de pitagórico de Hipaso, es posible que él mismo esperara que la medida de esta diagonal pudiera expresarse como un número natural o una fracción... pero en realidad no fue así. Hipaso se dio cuenta de que esta medida no podía expresarse ni como un número natural ni como una fracción formada por números naturales. Ahora sabemos que esta diagonal mide $\sqrt{2}$, y que es un número de los conocidos como **irracionales**. En la imagen de la derecha puedes ver una aproximación de con quince decimales.

Al menos esto cuenta la leyenda, esto es, que Hipaso fue el descubridor de este hecho. Lo que parece más cercano a la realidad fue que el propio Hipaso comunicó este descubrimiento fuera de la comunidad pitagórica... y esto fue lo que significó el *final* de Hipaso. Según algunas fuentes, los pitagóricos lo arrojaron al mar por revelar fuera de la secta esta *catástrofe pitagórica*, aunque otras aseguran que lo que hicieron los pitagóricos fue organizar un simulacro de funeral, con tumba incluida, que simbolizaba que para ellos Hipaso pasaba a estar muerto. Hasta se comenta que Hipaso podría haberse suicidado (hecho que podría cuadrar con la hipótesis del funeral simulado). Sea como fuere, la raíz de la muerte de Hipaso para lo pitagóricos, ya fuera ideológica o real, fue esa diagonal del cuadrado, ese número irracional, esa **hecatombe** pitagórica (¿cómo se iba a poder explicar el Universo con números naturales y fracciones si ni siquiera puede medirse la diagonal de un cuadrado con ellos?) que fue $\sqrt{2}$.



(Esta anécdota la he sacado del libro *Pasiones, piojos, dioses...y matemáticas*, de Antonio J. Durán).

^DiAmOnD^, "La muerte de Hipaso", 9 de agosto de 2010, en *Gaussianos.com* <http://gaussianos.com/la-raiz-de-la-muerte-de-hipaso/>, consulta: marzo de 2015.

Glosario

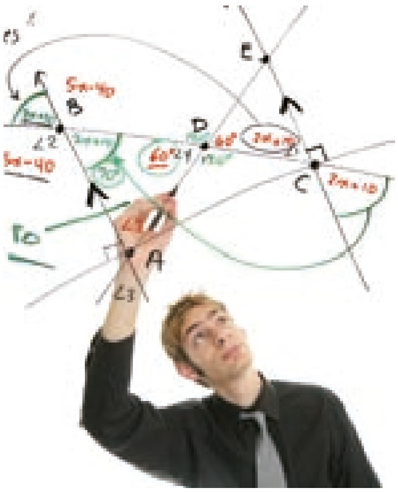
A la postre: al final, después de todo, en definitiva o en última instancia.

Hecatombe: suceso trágico en el que se produce una gran destrucción y muchas desgracias humanas y materiales.

TIC

Para conocer más sobre los números irracionales, consulta el siguiente video "Diagonales, hacia un encuentro mágico con los números irracionales", en:

http://slideplayer.es/slide/5566812/



Operaciones con números reales

JUEGO 3 DIGITAL

Los números reales tienen en sus operaciones las mismas propiedades, que los números naturales, racionales y enteros. En este apartado resumiremos las propiedades de estas operaciones.

Suma de números reales

Para sumar dos números reales con el mismo signo, ya sea negativo o positivo, se suma su valor absoluto.

El valor absoluto puede determinarse por medio de la siguiente regla:

|2.5| = 2.5 como 2.5 es mayor o igual a 0, su valor absoluto es igual a 2.5.

|0| = 0, como 0 es mayor o igual a cero, su valor absoluto es 0.

|–2.5| = 2.5, como –2.5 es menor que 0, su valor absoluto es 2.5.

La suma de dos números positivos da como resultado un número positivo siempre, y la suma de dos números negativos será un número negativo.

Ejemplo:

–5 + (–6)

Para determinar la suma de estos números negativos, se deberá sumar los valores absolutos, y al final colocar al resultado el número negativo, ya que los dos números son negativos.

| –5| = 5

| –6| = 6

5 + 6 = 11

–5 + (–6) = –11

Para sumar dos números con signo diferente sea uno positivo y otro negativo, se resta el valor absoluto menor del valor absoluto mayor, y la respuesta deberá tener el signo del número con valor absoluto más grande.

El resultado de una suma de dos números con signo diferente puede ser positivo, negativo y cero.

Ejemplo:

3 + (– 8)

Como los signos que se suman son de signos opuestos, restamos el valor absoluto mas pequeño del valor absoluto mayor.

Primero tomamos cada valor absoluto.

|3| = 3 | – 8| = 8

Ahora determinamos la diferencia 8 – 3 = 5. Como el número –8 tiene el mayor valor absoluto que el número 3, al resultado de la suma se le coloca el signo negativo, siendo el resultado –5.

La suma posee las siguientes propiedades:

Conmutativa. La forma más común para expresar esta propiedad es: “**el orden de los sumandos no altera la suma**”; es decir, que si tenemos *a* y *b*, y éstos son dos números reales, la propiedad conmutativa la podemos expresar como:

$$a + b = b + a$$

Ejemplo:

5 + 6 = 11, o bien, 6 + 5 = 11

5.5 + (–4.5) = 1, o también –4.5 + 5,5 = 1

$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{20} = \frac{3}{20}$, también podemos tener que $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1+2}{20} = \frac{3}{20}$

Asociativa. Cuando tenemos más de dos sumandos, resulta lo mismo cuál de las sumas se efectúe primero. Esto es: si *a*, *b* y *c* son tres números reales, la propiedad asociativa nos determinará que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Ejemplo:

$3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12$, y también $(3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12$

$-4 + (-5 + 6) = -4 + (1) = -3$, pero también $[-4 + (-5)] + 6 = -9 + 6 -3$

$$\frac{6}{8} + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{6}{8} + \left(\frac{2+3}{12}\right) = \frac{6}{8} + \frac{5}{12} = \frac{6+5}{96} = \frac{11}{96},$$

esta operación se puede también realizar como: $\left(\frac{6}{8} + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} = \left(\frac{6+2}{24}\right) + \frac{3}{4} =$

$$\frac{8}{24} + \frac{3}{4} = \frac{8+3}{96} = \frac{11}{96}$$

Las propiedades conmutativa y asociativa las utilizamos cuando en una suma llevamos a cabo un acomodo de los sumandos para facilitar el proceso.

Por ejemplo, cuando vamos al centro comercial y la cajera nos cobra marcando cada uno de los artículos, que tienen diferentes precios unitarios, la suma total de todo lo comprado siempre será igual no importando el orden en que lo vaya sumando, esto se debe a la propiedad conmutativa, y cuando suma todos los precios de los artículos iguales primero y después los demás, también siempre dará el mismo resultado. Y esto se debe a la propiedad asociativa.

Actividad de desarrollo

Atención

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. Arturo debía 120 dólares y recibió 500. Expresa el estado económico de Arturo.
2. Un hombre que tenía \$1 500 pesos hizo una compra por valor de \$2 000. Expresa su estado económico.
3. Yo tenía \$2 000, cobre \$560 y pagué deudas por \$2 000. ¿Cuánto tengo?
4. Juan compró ropa por valor de \$800 pesos y alimentos por \$1 800. Si después recibe 1500. ¿Cuál es su estado económico?
5. Lupe tenía \$255, pagó \$200 que debía, después cobró \$8 500 y luego hizo gastos por \$1 000. ¿Cuánto tiene Lupe?
6. Lola hace una compra por \$400; después recibe \$300; luego hace otra compra por \$200 y después recibe \$150. Expresa su estado económico.
7. Después de recibir 800 pesos, hago tres gastos por 150, 550 y 350. Recibo entonces 300 y luego hago un nuevo gasto por 900. ¿Cuánto tengo?
8. Pedro tenía tres deudas de \$450, \$750 y \$900 respectivamente. Entonces recibe \$ 1 500 y hace un gasto de \$1 000. ¿Cuánto tiene?

2. Compara tus operaciones con un compañero y una vez que lleguen a acuerdos argumenten sus resultados ante el grupo.

Elemento neutro. Cuando sumamos el número real “0” a cualquier otro número real, lo deja sin cambiar, es decir, consideremos que “a” es un número real, entonces:

$$a + 0 = a$$

Ejemplo:

$15 + 0 = 15$

$0 + (-100) = -100$

Elemento inverso. Esta propiedad se presenta en todo número real, es decir, todo número posee su inverso aditivo, esto nos lleva a entender que si sumamos el número y su respectivo inverso, el resultado de esta suma es 0. En forma general, cuando tenemos un número “a” y sabemos que es un número real, entonces:

$$a + (-a) = 0$$

Ejemplo:

Sea 5, entonces su inverso aditivo será –5 , esto se comprueba fácilmente si realizamos la suma: $5 + (-5) = 0$.

Resta de números reales

Todo problema de sustracción puede expresarse como un problema de suma por medio de la regla siguiente: $x - y = x + (-y)$.

Para restar y de x, se suma el opuesto o inverso aditivo de y a x.

Ejemplo:

5 – 8 significa 5 – (+8). Para restar 5 – 8 , se suma el opuesto de +8, que es –8, a 5,
$5 - 8 = 5 + (-8) = -3$

Multiplicación de números reales

La **multiplicación** es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto. El multiplicando y multiplicador son llamados factores del producto.

Para multiplicar dos números con signos iguales, ambos negativos o ambos positivos, se multiplican sus valores absolutos y esto dará como resultado una respuesta positiva.

Para multiplicar dos números con signos diferentes, uno positivo y el otro negativo, se multiplican sus valores absolutos. Y la respuesta será siempre negativa.

Ejemplo:

$(-10)\ (-5) = 27$ los números tienen signos iguales, ambos negativos, por lo que el signo del resultado es positivo.

$-4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{2} = -2$ Los números tienen diferente signo, por lo que el resultado será siempre negativo.

Cuando se multiplica más de dos números, el producto será negativo cuando exista un número impar de números con signo negativo, el producto será siempre con signo negativo. Y el producto será positivo cuando exista un número par de números con signo negativo.

La propiedad del producto cero

La propiedad del producto cero establece que si un producto en este caso $a \times b$ es igual a cero sea $a\ b = 0$, entonces, ya sea $a = 0$ o $b = 0$ (o ambas).

Un producto de factores es cero si y sólo si uno o más de los factores es cero. Esto es particularmente útil cuando se resuelven ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo:

Supon que se desea resolver la ecuación:

$x^2 + x - 20 = 0$

Se factoriza el lado izquierdo como:

$(x + 5)\ (x - 4) = 0$

Ahora, por la propiedad del producto cero, ya sea

$x + 5 = 0$ o $x - 4 = 0$, que significa que $x = -5$ o $x = 4$. Éstas son las dos soluciones de la ecuación.

Propiedades de la multiplicación

Conmutativa. Que es lo mismo que decir: **"el orden de los factores no altera el producto"**. Esto se garantiza bajo la siguiente situación: consideremos que a y b son dos números reales, la propiedad conmutativa se expresa así:

$$(a \times b) = (b \times a)$$

Ejemplo:

10 × 20 = 200, se obtiene el mismo resultado de la siguiente forma 20 × 10 = 200.

5 × (–10) = –50, se obtiene el mismo resultado cuando (–10) × 5 = –50.

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$, aunque también esta operación la podemos llevar acabo de la siguiente forma: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$

Asociativa. Cuando se tiene más de dos factores en una multiplicacion, resulta igual cuál de las multiplicaciones se efectúe primero. De tal forma que: si a, b y c son tres números reales, la asociatividad de éstos se expresa de la siguiente manera:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

Ejemplos:

2 × (3 × 4) = 2 × 12 = 24, y también puede ser (2 × 3) × 4 = 6 × 4 = 24

$\frac{3}{2} \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{6}\right) = \frac{3 \times (4 \times 3)}{2 \times (3 \times 6)} = \frac{3 \times (12)}{2 \times (18)} = \frac{36}{36} = 1$, también se puede realizar este producto como: $(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}) \times \frac{3}{6} = \frac{(3 \times 4) \times 3}{(2 \times 3) \times 6} = \frac{12 \times 3}{6 \times 6} = \frac{36}{36} = 1$

Cuando empleamos letras, se indica sólo $a \times b \times c$, o bien, para evitar que el signo × se confunda con la letra "x", marcamos $a\ b\ c$, o bien, se usa un punto en lugar de la cruz: $a \cdot b \cdot c$. Resulta también muy común prescindir del signo × cuando se señalan productos de números colocándolos entre paréntesis: por ejemplo, en vez de escribir (–5) × (–10), podemos escribir (–5) (–10), y en vez de escribir 3 × 8 podemos escribir 3(8). Esto es, cuando no se señala ninguna operación entre dos números, se efectúa una multiplicación.

Otras propiedades de la multiplicación que son muy aplicadas en el proceso, pero no nos detenemos a razonar en ellas al llevar a cabo las operaciones son:

Elemento neutro. El número real 1 multiplicado a cualquier número lo deja sin cambiar: si z es un número real, entonces:

$$z \times 1 = z$$

Ejemplo:

10 × 1 = 10

1 × (20) = 20

Elemento inverso. Esta propiedad expresa que todo número real que sea distinto de cero tiene un inverso multiplicativo, esto no lleva a entender que si se multiplican el número y su inverso, el resultado del producto siempre nos dará 1; es decir, que si a es un número real que además es distinto de cero, entonces, podemos generalizar de la siguiente forma:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

En este caso es necesario recordar que escribir $\frac{1}{a}$ es lo mismo que escribir $1 \div a$.

Ejemplo:

El inverso multiplicativo de 10 es $\frac{1}{10}$, se tiene lo siguiente:

$$10 \times \frac{1}{10} = 1$$

Otro caso es, el neutro multiplicativo de –50 es $\frac{1}{-50}$, debido a que:

$$-50 \times \frac{1}{-50} = 1$$

Cuando nuestro número real es un número fraccionario procedemos así: sea el número real $\frac{9}{7}$, su inverso multiplicativo es $\frac{1}{\frac{9}{7}}$:

$$\frac{9}{7} \times \frac{1}{\frac{9}{7}} = \frac{9}{7} \times \frac{\frac{1}{1}}{\frac{9}{7}} = \frac{9}{7} \times \frac{7}{9} = 1$$

División de números reales

Para dividir dos números con signos iguales, ambos negativos o ambos positivos, se dividen los valores absolutos y obtenemos un cociente con signo positivo.

Para dividir dos números con signos diferentes, sea uno positivo y otro negativo, se dividen los valores absolutos de cada número y se obtiene un resultado con signo negativo (–).

Ejemplos:

$-24 \div 4$

$\frac{-24}{4} = -6$, ya que los signos son diferentes, el signo del cociente será siempre negativo.

$-25 \div -5$

$\frac{-25}{5} = 5$, ya que tenemos signos iguales en cada uno de los números, el resultado será siempre positivo.

Cuando el denominador de una fracción es un número negativo, por lo general, reescribimos la fracción con un denominador positivo, para lo cual usamos la regla siguiente.

$$\frac{a}{-b} = \frac{-b}{a} = -\frac{a}{b}$$

Diferentes bases de sistemas numéricos

- Se llama **sistema numérico** al conjunto ordenado de símbolos o dígitos y a las reglas con que se combinan para representar cantidades numéricas.
- Existen **diferentes sistemas numéricos**, cada uno de ellos se identifica por su base.
- Un **dígito** en un sistema numérico es un **símbolo** que no es combinación de otros y que representa un entero positivo.
- La **base de un sistema numérico** es el número de dígitos diferentes usados en ese sistema.

A continuación se ejemplifican estas definiciones con los sistemas numéricos más comúnmente usados:

- **Decimal** utiliza 10 símbolos (dígitos) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- **Binario** utiliza 2 símbolos (dígitos) : 0, 1.
- **Octal** utiliza 8 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- **Hexadecimal** utiliza 16 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, u otros con cualquier base.
- **Terciario** (base 3), utiliza 3 símbolos (dígitos): 0, 1, 2.
- **Cuaternario** (base 4), utiliza 4 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3.
- **Quinario** (base 5), utiliza 5 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4.
- **Senario** (base 6), utiliza 6 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- **Heptal** (base 7), utiliza 7 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- **Nonario** (base 9), utiliza 9 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etcétera.
- N**otación** para distinguir entre los diferentes sistemas numéricos se puede encerrar entre paréntesis el número y se le añade un subíndice que indicará la base que se está usando. Sin embargo, si no se usa subíndice se deberá entender que el número está en base diez, a menos que se diga lo contrario.

Ejemplos:

$35 = (35)_{10}$ = 35 base 10 (sistema decimal).

$(110.100)_2$ = 110 100 base 2 (sistema binario).

$(453)_4$ = 453 base 4.

También se puede escribir el número sin paréntesis y encerrar el subíndice entre paréntesis.

Ejemplos:

$35 = 35_{(10)}$ = 35 base 10 (sistema decimal).

$110\ 100_{(2)}$ = 110 100 base 2 (sistema binario).

$453_{(4)}$ = 453 base 4.

Conversión entre sistemas con distinta base numérica

Conversión de binario a decimal

Para transformar números binarios en su correspondiente decimal se multiplica cada dígito binario, que sólo puede ser el 0 (cero) o el 1 (uno), por 2 elevado a la potencia correspondiente a la posición o peso de cada uno. Luego se suman los valores obtenidos y tenemos el número final en base decimal.

Ejemplos:

El número 111_2 (111 en base 2) (binario) corresponde a 7 en base decimal.

Veamos cómo se hace:

Primer digito binario $1 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4$

Segundo digito binario $1 \cdot 2^1 = 1 \cdot 2 = 2$

Tercer digito binario $1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$

El total nos da $4 + 2 + 1 = 7$

Ejemplo:

El número $1\ 101_2$ (1 101 en base 2) (binario) corresponde a 13 en base decimal.

Primer digito binario $1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 8 = 8$

Segundo digito binario $1 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4$

Tercer digito binario $0 \cdot 2^1 = 0 \cdot 1 = 0$

Cuarto digito binario $1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$

El total nos da $8 + 4 + 0 + 1 = 13$

Ejemplo con números fraccionarios:

El número 0.011_2 (0.011 en base 2) (binario) corresponde a 0.375 en base decimal.

Posición o peso 3 2 1 0 –1 –2 –3

Número binario 0. 0 1 1

El cero queda tal cual 0.

Primer dígito después del punto $0 \cdot 2^{-1} = 0 \cdot 0.5 = 0$

Segundo dígito después del punto $1 \cdot 2^{-2} = 1 \cdot 0.25 = 0.25$

Tercer dígito después del punto $1 \cdot 2^{-3} = 1 \cdot 0.125 = 0.125$

El total nos da lo siguiente $0.125 + 0.25 + 0 = 0.375$

Nota importante:

Podemos convertir números de cualquier base numérica a otro de base decimal usando el mismo procedimiento. Sólo se cambia la base de la potencia colocando en cada caso como base la base numérica de que se trate.

Ejemplo:

Convertir el número $1212_{(5)}$ (base 5) en número decimal (base 10).

Primer digito binario $1 \cdot 5^3 = 1 \cdot 125 = 125$

Segundo digito binario $2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$

Tercer digito binario $1 \cdot 5^1 = 1 \cdot 5 = 5$

cuarto digito binario $2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$

El total nos da $125 + 50 + 5 + 2 = 182$

$\mathbf{1\ 212_{(5)} = 182_{(10)}}$ 1 212 base 5 corresponde con 182 base 10.

Conversión de decimal a binario

Para hacerlo se utiliza el **método de divisiones** y **multiplicaciones sucesivas**.

Para convertir un número entero base decimal a una nueva base, el número base decimal es sucesivamente dividido por la nueva base.

Como en nuestro caso la nueva base es 2, el número será sucesivamente dividido por 2; es decir, el número original es dividido entre 2, el resultado de ese cociente es dividido por 2 sucesivamente hasta que el cociente sea 0 (cero). Los restos de cada división, ordenados desde abajo hacia arriba, conforman el número binario buscado. Entonces, tomamos el último divisor y los restos hacia arriba, para formar el número binario resultante de la conversión.

Veamos esto con un ejemplo:

Convertiremos a binario el número 18_{10} (base 10) sistema decimal.

18 ÷	2		
0	9 ÷	2	
	1	4 ÷	2
		0	2 ÷ 2
		0	1

Desde el **último 1** anotamos los restos hacia arriba:

1 0 0 1 0 y tenemos el número binario que corresponde al 18 decimal.

1 0 0 1 0 $_{(2)}$ binario = 18 $_{(10)}$ decimal.

Convertir un decimal fraccionario a binario

En el caso de convertir a binario un **número decimal fraccionario**, la parte fraccionaria (lo que está después del punto decimal) debe ser **multiplicada por 2** y el número binario será formado por los ceros o unos que aparecen en la parte correspondiente al entero en cada multiplicación.

Sólo que en este caso el número binario se escribe de izquierda a derecha, a diferencia de lo explicado antes para los números enteros.

Las multiplicaciones se efectúan **sólo sobre la parte fraccionaria del número**, por lo que siempre serán 0. XXX. Nunca debe multiplicar 1. XXX.

El proceso de multiplicaciones sucesivas concluye cuando quedan en cero la parte entera y la fraccionaria. En este ejemplo convertiremos el número decimal fraccionario $0.625_{(10)}$.

0.625 × 2 = **1**.250 (lo que está después del punto decimal: 250) lo multiplicamos por 2.

0.250 × 2 = **0**.500 (lo que está después del punto decimal: 500) lo multiplicamos por 2.

0.500 × 2 = **1**.000 (lo que está después del punto decimal: 000) marca el final de la operación.

La operación concluye porque no queda parte fraccionaria para seguir multiplicando.

Entonces:

$0.625_{(10)} = 0.101_{(2)}$

Conversión de decimal a número con otra base

En esos casos basta usar el mismo método de conversión de decimal a números binarios. Pero en vez de hacer divisiones sucesivas entre 2, hay que efectuarlas por el número que indica la nueva base.

Veamos el siguiente ejemplo:

Convertir el número $144_{(10)}$ en número base 7.

144 ÷	7	
4	20 ÷	7
	6	2

Entonces:

Desde el 2 (primer dígito del número nuevo) anotamos los restos hacia arriba: **2 6 4**

$264_{(7)} = 144_{(10)}$ 264 base 7 corresponde a 144 base 10.

Resolución de problemas de tanto por ciento

El **porcentaje** es un número asociado a una razón, que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes. También se le llama comúnmente **tanto por ciento**, donde por ciento significa "de cada cien unidades". Se usa para definir relaciones entre dos cantidades, de forma que el *tanto* por ciento de una cantidad, donde *tanto* es un número, se refiere a la parte proporcional a ese número de unidades de cada cien de esa cantidad.

El porcentaje se denota utilizando el símbolo %, que matemáticamente equivale al factor 0.01 y que se debe escribir después del número al que se refiere. Por ejemplo, "treinta y dos por ciento" se representa mediante 32% y significa "treinta y dos de cada cien". También puede ser representado:

$$32\% = 32 \cdot 0.01$$

y, operando:

$$32\% = 32 \cdot 0.32$$

El 32 % de 2 000, significa la parte proporcional a 32 unidades de cada 100 de esas 2 000, es decir:

$$32\% \cdot 2\,000 = 0.32 \cdot 2\,000 = 640$$

640 unidades en total.

El porcentaje se usa para comparar una fracción (que indica la relación entre dos cantidades) con otra, expresándolas mediante porcentajes para usar 100 como denominador común.

Cualquier porcentaje se puede expresar en forma de fracción o número decimal y, a su vez, cualquier número decimal o fracción se puede expresar en porcentaje:

Porcentaje	Se lee	Fracción	Decimal	Significado
10%	Diez por ciento	$\frac{10}{100}$	0.1	10 de cada 100
30%	Treinta por ciento	$\frac{30}{100}$	0.3	30 de cada 100
3%	Tres por ciento	$\frac{3}{100}$	0.03	3 de cada 100

Existen dos formas para hallar un porcentaje o tanto por ciento.

- Para calcular el porcentaje de una cantidad, multiplicamos la cantidad por el número que indica el porcentaje y dividimos el resultado entre 100.

Ejemplo:

El 20% de los estudiantes de un colegio, que tiene 240 alumnos, practica deporte. ¿Cuántos estudiantes practican deporte?

Para hallar la respuesta multiplicamos 240 por 20 y dividimos el resultado entre 100:

$$240 \cdot 20 = 4\,800; \ \frac{4\,800}{100} = 48$$

Por tanto, el 20% de 240 alumnos = 48 alumnos.

- Para calcular el porcentaje de una cantidad, multiplicamos la cantidad por la expresión decimal de dicho porcentaje.

Ejemplo: Observa esta igualdad:

$$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$$

Para calcular el 20% de 240, basta con multiplicar 240 por 0.2:

$$240 \cdot 0.2 = 48$$

Aplicaciones de los porcentajes

Entre otros usos los porcentajes se usan para:

- Relacionar una parte con el todo. Ejemplo: "El 58% de los aspirantes a ingresar en la Universidad son mujeres".
- Determinar una proporción entre dos cantidades: Ejemplo: "La proporción de levadura y harina para el bizcocho es del 3 por ciento".

- Describir a la población, indicando el peso relativo de una magnitud sobre ella. Ejemplo: “El 16% de la población tiene estudios superiores”. Gran parte de la estadística se expresa en porcentajes.
- Determinar la variación relativa de una cantidad. Ejemplo: “El nivel del agua almacenada en los embalses ha subido un 8% en lo que va del año”.
- Determinar el interés bancario y el impuesto del IVA (el impuesto sobre el valor agregado).

El interés bancario

Las entidades financieras (bancos, cajas de ahorros, etc.) dan a sus clientes un interés por tener depositado su dinero. Es directamente proporcional a la cantidad guardada y al tiempo que dura el depósito, y se mide en tanto por ciento.

Cuando se pide un préstamo al banco también se paga un interés.

Ejemplo:

La caja de ahorros local ofrece a María un 4% anual para los 6 000 pesos que tiene ahorrados. ¿Qué interés obtendrá María por su capital a final de año?

Un interés del 4% anual significa que de cada 100 pesos obtiene 4 al año.

Por tanto,

$$6\,000 \cdot \frac{4}{100} = \$240$$

Pero ¿y si María guarda el dinero en la caja durante 4 años?

En cuatro años le producirá cuatro veces esa cantidad:

$$6\,000 \cdot \frac{4}{100} \cdot 4 = \$960$$

Cálculo del interés bancario

$$I = \frac{(c \cdot r \cdot t)}{100}$$

Donde:

- ***I*** es el **interés bancario**.
- ***r*** es el **crédito.**
- ***c*** es el **capital**.
- ***t*** es el **tiempo**.

Cálculo del IVA

Otro ejemplo es el impuesto sobre el valor agregado (IVA), del 16 por ciento (16 %), que se paga al Estado a través de la Secretaría de Hacienda en toda transacción comercial (transferencia de bienes o prestación de servicios).

Ejemplo:

Determinar el IVA de 1 000 pesos.

$$16\% \text{ de } 1\,000 = \frac{16 \cdot 1\,000}{100} = 160$$

También se puede hacer así: $1\,000 \cdot 0.16 = 160$.

Conversión de fracción a tanto por ciento

En este caso se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{(100)(3)}{5}$$

$$x = 60$$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Ejemplo:

- El uso de los porcentajes puede ser definido o aplicado de la siguiente manera (uso natural o fraccionaria).

CURIOSIDADES

De acuerdo con *Baker & McKenzie*, en un estudio retomado por *BBC Mundo*, el promedio del IVA que se cobra en todo el mundo es del 15%, mientras la media en América Latina está en el 9 por ciento.
Los países que más IVA cobran en América Latina son Uruguay (22%) y Argentina (21%). Los países que menos IVA pagan son Paraguay (10%) y Panamá (7%).
Honduras y Nicaragua pagan el 15% de este impuesto.
México se ubica en sexto lugar con el 16 por ciento.
Brasil paga el 17 por ciento.
Cuba es el único país de América Latina en el que no se cobra el IVA.

Ejercicio: convierte a %

a) $0.82 = \frac{82}{100} = 82\%$

b) $0.042 = \frac{42}{1\,000} = \frac{4.2}{100} = 4.2\%$

c) $0.0345 = \frac{345}{10\,000} = \frac{3.45}{100} = 3.45\%$

d) $1.25 = \frac{125}{100} = 125\%$

e) $2.034 = \frac{2\,034}{1\,000} = \frac{203.4}{100} = 203.4\%$

Convierte de fracción a %

a) $\frac{9}{10} = \frac{x}{100} = \frac{(100)(9)}{10} = \frac{900}{10} = \frac{90}{100} = 90\%$

b) $\frac{56}{58} = \frac{x}{100} = \frac{(100)(56)}{58} = \frac{560}{58} = \frac{96.5}{100} = 96.5\%$

c) $\frac{4}{5} = \frac{x}{100} = \frac{(100)(4)}{5} = \frac{400}{5} = \frac{80}{100} = 80\%$

d) $\frac{1}{3} = \frac{x}{100} = \frac{(100)(1)}{3} = \frac{100}{3} = \frac{33.3}{100} = 33.3\%$

Actividad de cierre

Disciplina

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

1. De forma individual, resuelve los problemas en tu cuaderno.

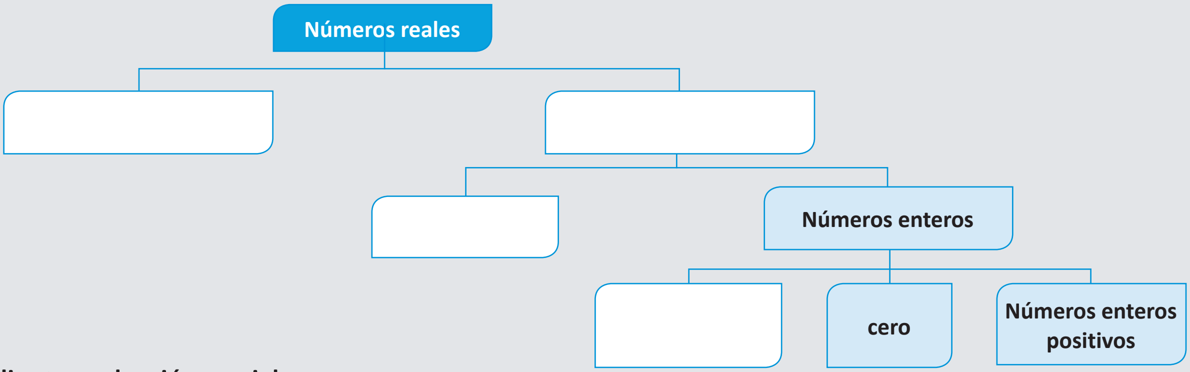
1. Completa para que las igualdades sean verdaderas.

   a. 34 : 38 = 34 × ___ b. 82 × 4 = ____ c. (0.5) 2 : 2 – 2 = ____ d. × 108 × ____ = 105
2. Una información de prensa de fecha 2 de junio de 2008, señala que la producción diaria de basura en el Estado de México es 7.000 ton. Estimar un promedio de basura por casa, suponiendo cinco personas por casa y un total de 15 millones de habitantes.
3. Una pelota de goma rebota hasta las 3/4 partes de la altura desde la que se la deja caer. Si la soltamos desde una altura de 16 metros, ¿cuál es la distancia que recorre esta pelota, una vez que toca el suelo por tercera vez?
4. El Hospital General de una ciudad tiene 18 niveles. Cada nivel dispone de 15 habitaciones, y en cada habitación hay 3 camas. ¿Cuántos enfermos caben en dicho hospital?
5. Para trasladarse de un país a otro en el continente Africano, una persona ha recorrido: 38 Km en auto, a caballo 34 Km más que en auto; en ferrocarril 316 Km más que en auto y a caballo; y en avión 312 Km. Si todavía le faltan 516 Km para llegar a su destino ¿Cuál es la distancia entre los dos países?
6. Un albañil tiene en su bodega 4 palas, 6 cinceles, 4 martillos, 10 cascos, 5 carretillas, 3 zapapicos, 2 flexometros y 3 mangueras de nivel. ¿Cuántos artículos tiene en total?
7. La rama de un árbol mide 15 cm de largo. Un niño rompe 3 cm de rama. En un año crece 6 cm y un hombre con una sierra corta 11 cm. ¿Cuántos cm mide la rama?
8. Un deportista hace montañismo escalando un cerro de 1443 m de altura y por la tarde realiza submarinismo llegando hasta 49 m bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros hay entre el punto más alto y el punto más bajo?
9. Unos niños juegan con los ascensores de un rascacielos. Están en la planta principal y suben 42 pisos. Después bajan 5 pisos. Vuelven a subir 11 pisos y luego descienden 23. Suben 9 pisos más y finalmente bajan 6 pisos, hasta que el guardia de seguridad del edificio los detiene y les obliga a bajar por las escaleras. ¿Cuántos pisos tendrán que bajar por las escaleras para salir a la calle?
10. Cierto virus afecta a la tercera parte de una población de 2 100 habitantes. ¿Cuántos habitantes no padecen por consecuencia del virus?

2. Comparte tus resultados con tus compañeros. Describan, por turnos, en el pizarrón los procedimientos realizados y determinen la respuesta correcta entre todos.

Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 1.1" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.

1. Escribe los datos que faltan para completar el diagrama de la clasificación de los números reales.



Realiza tu evaluación parcial

1. Relaciona con una línea las dos columnas para completar las definiciones.

Un conjunto es....	conjunto vacío.
Decimos que un conjunto *A* está contenido en otro conjunto *B* cuando todos los elementos de *A* también pertenecen al conjunto *B*. Y esto se escribe...	$A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
Dos conjunto son iguales si se cumple...	sirve para representar el conjunto universal, así como sus operaciones.
El conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se trabaja se llama...	no están incluidos en él, es decir, que no pertenecen al conjunto dado.
La intersección de dos elementos está constituida por los elementos...	$A \subseteq B$, y se lee *A* es subconjunto de *B*.
El conjunto complemento de otro conjunto está formado por los elementos del conjunto universal que...	al primer conjunto, pero no al segundo.
La diferencia de dos conjuntos es el conjunto de elementos que pertenecen...	que pertenecen a ambos conjuntos.
El diagrama de Venn...	pertenecen a cualquiera de los conjuntos dados.
La unión de dos conjuntos está formada por los elementos que...	conjunto universal.
Si en un conjunto no existen elementos, éste se denomina...	una colección bien definida de determinados elementos.

Valor: 3 puntos

2. Clasifica y escribe a un lado de los siguientes números reales el subconjunto al que pertenezcan.

$\frac{7}{5}$ ____________________ $\sqrt{36}$ ____________________

$\frac{10}{5}$ ____________________ -7 ____________________

2.3333... ____________________ 5.4 ____________________

$\sqrt{7}$ ____________________ $\frac{\pi}{2}$ ____________________

Valor: 2 puntos

Actividad de evaluación 1.1.1

Atención

VALORES

TIC

EVALUACIÓN

RÚBRICA

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno la serie de ejercicios propuesta en tres partes, aplicando el conjunto de los números reales.

Parte 1. Aplicación de conjuntos

Ejercicios de las propiedades de conjuntos en los números reales, empleando las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas).

1. Tenemos los siguientes conjuntos:

$U = R$ (números reales)

$A = \{ x \mid x < 13 \}$

$B = \{ x \mid x \geq -4 \}$

$C = \{ x \mid x > 21 \}$

2. Encuentra los conjuntos:

a. $A \cup B$

b. $(A \cup C)^C$

c. $A \cap B$

d. $(A - B) \cup C$

e. $(B \cap C) \cap A^C$

3. Dados lo siguientes conjuntos, representa mediante un diagrama de Venn-Euler la solución a cada operación de conjuntos e indica qué elementos forman la solución.

$$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\ 15 \}$$

$A = \{ 4, 8, 10, 12 \}$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

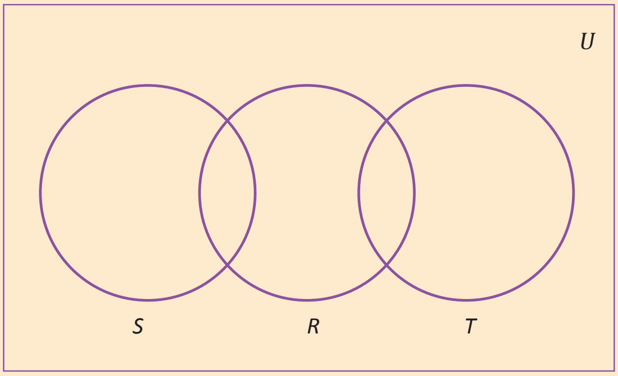
$C = \{1, 2, 3, 11, 12, 13\}$

$D = \{1, 5, 6, 10, 11\}$

$E = \{12, 13, 14, 15\}$

a) $A \cup B$
b) $(A \cap B)'$
c) $(D \cap E) - A$
d) $B \cup C$
e) A'
f) B'
g) $E' \cap D$
h) $B \cap E$
i) $B \cup E$
j) $A \cup C$
k) $(B \cup C)'$
l) $(C \cap D)'$
m) $(A \cap D)'$
n) $(E \cup C)'$

4. Sombrea en cada uno de los diagramas la solución que satisfaga a la operación de conjuntos pedida: $(S \cap R) \cup T$.



5. Dados los conjuntos: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ y $C = \{5, 6, 8\}$, construye los diagramas y resuelve las operaciones.

$$A \cup C$$

$$B \cup C$$

6. Dados los conjuntos: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e\}$ y $C = \{d, f, g\}$, construye los diagramas de Venn y resuelve las operaciones.

$$A - C$$

$$B - C$$

7. Sean $U = \{a, e, i, o, u\}$ y $A = \{o, u\}$. Realiza el diagrama de Venn y determina los elementos de A^c.

8. Con los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$, calcula $(B - A)^c =$ $\{ \qquad \}$

Representación en notación de conjunto y diagramas de Venn los resultados obtenidos.

9. En una escuela un grupo de 64 alumnos, algunos se han inscrito en los cursos de danza y pintura; si se sabe que 30 estudian danza, 15 pinturas y 9 ambos danza y pintura.
   - a. ¿Cuántos estudian únicamente danza?
   - b. ¿Cuántos no estudian pintura?
   - c. ¿Cuántos estudian ambas?
   - d. ¿Cuántos alumnos no estudian ninguno de los dos artes?

Parte 2. Aplicación de números reales

Transformación de operaciones de la base dada a la base que se pide describiendo el desarrollo del resultado.

1. Pasar a base 2 el número de base decimal 4 231.
2. Pasar a base 3 el número de base decimal 12 470.
3. Pasar a base 8 el número decimal 3 450 043.
4. Pasar a base decimal el número binario 1 000 110 100 101 110.

Parte 3. Serie de ejercicios con porcentajes

Calcular los porcentajes. Incluir las operaciones realizadas de cada serie, construir una tabla de valores de proporción directa e inversa y describir las diferencias de cada una.

1. 225 de 450.
2. 15 de 300.
3. 45 de 150.
4. 630 de 1 050.
5. 14 175 de 31 500.
6. La tabla resume la asistencia a clases en cinco cursos, el primer lunes de abril, en un instituto de idiomas. Completa los datos faltantes.

Idioma	Total de alumnos	Asistentes	% Ausentes
Inglés	129	114	
Francés	40	36	
Alemán	65	52	
Portugués	35	21	
Japonés	58	29	

7. En una población de 100 000 personas 52 300 son mujeres. De estas mujeres, 28 765 son mayores de edad. El 47% de los hombres son mayores de edad.
   a. ¿Cuál es el porcentaje de mujeres en la población?
   b. ¿Cuál es el porcentaje de las mujeres menores de edad?
   c. ¿Cuántos hombres hay en la población?
   d. ¿Cuántos hombres son mayores de edad?
8. El 1.2% de paquetes en el correo se pierden. Un tercio de estos paquetes se encuentran una semana después. Si un día llegan 500 paquetes.
   a. ¿Cuántos paquetes llegarán ese día a su destinatario?
   b. ¿Qué porcentaje de los paquetes llegarán una semana tarde a su destinatario?
9. Durante 25 minutos de ver televisión, hay 7 minutos de anuncios comerciales. Si ves 70 minutos de televisión, ¿cuantos minutos de anuncios verás?
10. Si una docena de huevos cuesta 21.50 pesos, ¿cuál será el costo de 100 huevos?
11. Vito usa 9 litros de agua para regar 24 macetas. Se pregunta cuántos litros de agua se necesitarían para regar 40 macetas.

Encuentra la proporción inversa y construye una tabla de valores:

12. Supongamos que en una granja 200 patos consumen la totalidad del alimento que hemos almacenado en un depósito en el término de 15 días. ¿Cuánto tiempo demorarán 300 patos en culminar con similar cantidad de alimento guardado?
13. Los estudiantes de un colegio de México realizan la contratación de un ómnibus con la finalidad de realizar un hermoso paseo de fin de cursos. Para el caso que viajen un total de 32 estudiantes para completar el costo total del viaje, cada uno de ellos tendrá que abonar la suma de $400. La interrogante es ¿si sólo viajan 25 estudiantes, cuánto dinero deberá pagar cada uno de ellos?

Problema de proporcionalidad:

14. Tres amigos organizan una microempresa, deciden instalarse con una panadería y vender, entre otros productos, pan integral. La experiencia casera les indica que un kilogramo de harina les rinde 1 250 kg de pan. Además, por cada kilo de harina, necesitan 40 g de levadura y 50 g de manteca vegetal. Para cada día de la primera semana, ellos piensan hacer 30 kg de pan. ¿Cuánta harina integral, levadura y manteca necesitan para hacer el pan de la semana?

Pan Kg	Harina Kg	Levadura g	Manteca g
1 250	1	40	50
12 500			
25 000			
5 000			
30 000			

2. Al finalizar, copia los ejercicios de las tres partes en un documento de Word, incluyendo su procedimiento y representación en notación de conjunto y diagramas de Venn.
3. En cada ejercicio explica textualmente los procedimientos y métodos aplicados, y los resultados que obtuviste paso por paso.
4. Revisa que la redacción de la descripción de los procedimientos y métodos aplicados tenga orden, claridad, concisión y precisión, y que la ortografía sea correcta.
5. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos, profesor, fecha, número de evaluación y los datos de la serie de ejercicios.
6. Antes de entregar al profesor, en documento de Word, tu serie de ejercicios, realiza tu “Autoevaluación 1.1.1” que se encuentra al final de esta unidad en la sección “Instrumentos de evaluación”. Revisa si tu trabajo cumple con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de entregarlo.
7. Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo en Word impreso a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza; es decir, que no estén arrugadas ni manchadas.

NO ABANDONO

"Si piensas que los perros no saben contar... pon tres galletas para perros en tu bolsillo y dale a Buddy solamente dos de ellas".

Phil Pastoret

10 horas

1.2 Plantea problemas cotidianos, mediante la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico

A muchos estudiantes el álgebra les parece un poco complicada; sin embargo, lo importante es entender su aplicación para así encontrarle sentido y una razón a los métodos utilizados. Esto es, conocer su utilidad y su aplicación en la vida diaria.

Con el álgebra se puede definir el uso de símbolos o letras para representar, estudiar cantidades indeterminadas y plantear, de este modo, soluciones a problemas cotidianos de la manera más general posible. Debido a que, en este caso, los símbolos representan cantidades numéricas, se indican operaciones aritméticas con éstos: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, radicaciones, etc. Entonces, las expresiones algebraicas nos llevan a entender la relación de números y símbolos con operaciones aritméticas.

El álgebra la podemos entender como un lenguaje que nos permite expresar cantidades, ya sean números o símbolos, y las reglas de las operaciones que se llevan a cabo con ellas. De manera general, los problemas reales los enunciamos mediante expresiones verbales que podemos transformar en expresiones algebraicas, esto es con letras (variables) y números (constantes), así como las operaciones aritméticas.

Actividad de inicio

Creatividad

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 9. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
ATRIBUTO	• Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

1. En equipo de cinco integrantes, realicen un juego de memoria para repasar algunas de las expresiones algebraicas vistas en secundaria y para aprender otras que se verán a lo largo de este tema. Para ello, hagan lo siguiente:

- Cada equipo corte 6 hojas blancas tamaño carta en 8 partes iguales para obtener 48 tarjetas.
- En cada tarjeta escriban las 22 expresiones en leguaje común de la lista de abajo, y en las otras 22 tarjetas escriban su traducción al lenguaje algebraico, repitan dos para completar las 48 tarjetas.
- Tomen 10 minutos para tratar de memorizar la lista. Después comiencen el juego de memoria. Revuelvan las tarjetas y colóquenlas bocabajo en filas formando un rectángulo.
- Develen un par de tarjetas por turnos. Ganará el alumno que acierte en juntar más pares.

Expresión algebraica	Leguaje común	Expresión algebraica	Leguaje común
a	Un número cualquiera.	$\frac{(a+b)}{3}$	La tercera parte de la suma de dos números.
b	Un número cualquiera.	a^2	El cuadrado de un número.
$a + b$	La suma de dos números o la adición de dos números.	a^3	El cubo de un número.
$a - b + c$	La suma de dos números cualesquiera menos otro número cualquiera.	$\sqrt{x}$	Raíz cuadrada de un número.
$A - b$	La resta de dos números o la diferencia de dos números.	$2b + 5d$	El duplo de b más el quíntuplo de *d*.
$a \cdot b$	El producto de dos números.	$3m - \frac{m}{3}$	El triple de m menos la tercera parte de *m*.
ab	El producto de dos números.	$20 + 2a$	20 aumentado en el doble de *a*.
$\frac{a}{b}$	El cociente de dos números.	$\frac{5(e+f)}{10}$	El quíntuplo de la suma de *e* más *f* dividido entre 10.
$2a$	El doble de un número.	$\frac{1}{a}$	El recíproco de un número.
$3\ (a+b)$	El triple de la adición de dos números.	$\frac{1}{(a+b)}$	El recíproco de la suma de dos números.
$\frac{x}{2}$	La mitad de un número.	$\frac{(a-b)}{3}$	La tercera parte de la diferencia de dos números.

2. Comenten con sus compañeros de grupo si, después de jugar, les resultó más fácil memorizar la expresiones y por qué.

Traducción del lenguaje común al algebraico

JUEGO 4 DIGITAL

El **lenguaje común** es aquel con el que nos comunicamos de forma oral o escrita con cualquier persona, es el que comúnmente utilizamos a través de un denominado código o lenguaje, por lo que a partir de este podemos relacionarnos mutuamente, ya que lo ocupamos en la vida diaria. El **lenguaje algebraico** es el empleado en la rama de la matemática: álgebra, en la cual utilizamos el lenguaje común para ayudar a entendernos; es decir, a partir del lenguaje común se emplea el algebraico.

Un ejemplo simple podría ser $1x$, se leería como una equis o sólo equis, porque x es la literal y 1 es el coeficiente. Al conjunto de una literal y un coeficiente con un exponente entero positivo, se le conoce como monomio, cuando existe un conjunto de monomios, separados por un signo de más o de menos se denomina polinomios y de ahí se derivan los binomios, que serían dos monomios separados por el signo $x + 2x$, trinomios, de tres monomios $x + x + 3x$.

El lenguaje algebraico tiene como principal función y característica el entendimiento matemático de los números.

Al resolver un problema algebraico pasamos del lenguaje literal (común) al lenguaje simbólico o algebraico que fue creado en la época de la Antigua Grecia por Diofanto, considerado *el padre del álgebra*

Constantes, variables y exponentes

Constante

Se dice que un valor es constante. **Constante** es todo aquel valor que se representa por cualquier letra, como a, b o c , número o símbolo con un valor numérico fijo o conocido, su nombre lleva implícito su significado, no pueden cambiar de valor. Pongamos un caso de cualquier número, por ejemplo 15, siempre será 15 al menos que se resuelva alguna operación matemática y el número cambie; o bien $\pi = 3.1416$ es una constante que representa la razón de la circunferencia de un círculo al diámetro.

Variable

Una **variable** es un símbolo que representa una cantidad que aún no conocemos. Generalmente es representada con una letra, convencionalmente empleamos la x o y. Entonces podemos decir que: una variable es una letra o símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto en determinado.

Las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del abecedario: *a, b, c, d, e*..., etc., las llamadas **constantes**. Todas las cantidades desconocidas en nuestras expresiones algebraicas se indican por las últimas letras del abecedario: *s, t, u, v, w, x, y, z*... a las que llamaremos **variables**.

Exponente

Los exponentes también se llaman **potencias** o **índices**. El **exponente** de un número nos dice cuántas veces se usa el número en una multiplicación.

Es aquella expresión que indica las veces que debe tomarse la variable o término contante al que está relacionada y que constituye un factor. El signo de elevación a potencia es el exponente, que es un número pequeño colocado arriba y a la derecha de la variable o término constante. En algunos casos el exponente es otra literal por ejemplo, x^m que se leerá "*m* veces *x*".

Ejemplo:

$(a)^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

En palabras: a^2 se puede leer "*a* a la quinta potencia", "*a* a la potencia 5" o simplemente "*a* a la quinta".

Es importante mencionar que cuando no existe exponente indicado en las cantidades, entonces, se tratará de un exponente 1.

CURIOSIDADES

Diofanto de Alejandría

Fue un matemático griego. Sus escritos contribuyeron de forma consistente en el perfeccionamiento de la notación algebraica y en el desarrollo de los conocimientos del álgebra de su época (siglo III). Diofanto mediante artificios de cálculo supo dar soluciones particulares a numerosos problemas, a él le debemos el establecimiento de las bases para el desarrollo de importantes cuestiones matemáticas. Se caracterizó por ser muy original en sus aportaciones, fue llamado por los historiadores el padre de los *algebristas modernos*. Se le atribuye el inició sistemático de símbolos para indicar potencias, igualdades o números negativos.

Los rumores dicen que no existe un premio Nobel de Matemáticas porque la esposa de Alfred Nobel le era infiel con un matemático, pero esto es falso puesto que Nobel nunca se casó, en realidad parece ser que no se entrega el premio de matemáticas porque era una disciplina que no le gustaba al señor Nobel.

Ejemplo:

$(x)^1 = x$

$ab = a^1 b^1$

Exponentes negativos

¿Negativos? ¿Qué es lo contrario de multiplicar? ¡Dividir! Un exponente negativo significa cuántas veces **se divide** entre el número.

Ejemplo: $8^{-1} = 1 \div 8 = 0.125$

O varias divisiones:

Ejemplo:

$5^{-3} = 1 \div 5 \div 5 \div 5 = 0.008$

Pero esto lo podemos hacer más fácilmente:

5^{-3} también se calcula así: $1 \div (5 \times 5 \times 5) = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0.008$

Este último ejemplo nos muestra una manera más fácil de manejar exponentes negativos:

Calcula la potencia positiva (a^n)

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Después calcula el recíproco ($\frac{1}{a^n}$)

Leyes de los exponenetes y ejemplos

Ley	Ejemplo
$x^1 = x$	$6^1 = 6$
$x^0 = 1$	$7^0 = 1$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$4^{-1} = \frac{1}{4}$
$x^m x^n = x^{m-n}$	$x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{x^4}{x^3} = x^{4-2} = x^2$
$(x^m)^n = x^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2\times 3} = x^6$
$(xy)^n = x^n y^n$	$(xy)^3 = x^3 y^3$
$(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}$	$(\frac{x}{y})^2 = \frac{x^2}{y^2}$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

AUDIO 6 DIGITAL

Lenguaje común y lenguaje algebraico

Las expresiones algebraicas muestran situaciones concretas de nuestro mundo real de una manera abstracta.

En el lenguaje común o “verbal” se emplean palabras, mientras que en el lenguaje algebraico se emplean letras y símbolos, que permiten reducir las proposiciones verbales en proposiciones algebraicas muy simples y fáciles de comprender.

Para resolver problemas matemáticos por medio del álgebra es necesario traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Algunos ejemplos de expresiones en lenguaje común traducidas a lenguaje algebraico son los siguientes:

Un número cualquiera = x
El doble de un número = $2x$

La tercera parte de un número = $\frac{x}{3}$

La diferencia entre dos números = $x - y$
El cuadrado de la suma de dos números distintos = $(a + b)^2$
El producto de la suma por la diferencia de dos números =$(x + y)(x - y)$
El cuadrado del doble de un número menos el triple de otro = $(2x - 3y)$
Un número más su consecutivo = $x + (x + 1)$

Actividad de desarrollo

Reflexión

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

ATRIBUTO

- Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

1. En parejas, escriban en lenguaje algebraico o lenguaje común los datos faltantes, según corresponda.

Lenguaje común	**Lenguaje algebraico**
Tres objetos cualesquiera.	______________________
______________________	$\frac{a + b}{2}$
La suma de dos veces un número más tres veces el mismo número es igual a cinco veces dicho número.	______________________
______________________	$z^3 - z$
______________________	$\frac{n}{m} \div \frac{b}{b}$
Cinco veces un número restado dos veces el mismo número es igual a tres veces dicho número.	______________________
Suma de los cuadrados de dos números.	______________________
______________________	$2\pi\, r$
______________________	$2\,(n - v)$
El área de un rectángulo es igual al producto de su largo por su ancho.	______________________

2. Corroboren sus respuestas con otra pareja, y si hay diferencias, lleguen a un acuerdo de la respuesta correcta.

Como pudimos darnos cuenta en el álgebra tenemos amplias ventajas con respecto a la aritmética porque además de utilizar números o cantidades que poseen un valor conocido (constantes), el álgebra maneja literales (variables) que representan todo un universo de valores, es decir, con literales es posible manejar una infinidad de cantidades, esto hace que el lenguaje algebraico sea una manera óptima de representar los problemas de la vida real en modelos matemáticos, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

Entonces el álgebra es en realidad un lenguaje, de tal manera que al igual que una lengua hablada existen semejanzas y diferencias entre un lenguaje y el lenguaje algebraico:

Semejanzas entre el lenguaje común y el algebraico:

- Utilizan símbolos.
- Los símbolos deben tener cierto orden para adquirir significado.
- Existen reglas para expresar adecuadamente las ideas.
- Representan ideas y también expresiones concretas.
- Se puede expresar lo que se conoce y lo que aún no se conoce.
- Presentan la susceptibilidad de crecer, es decir, de adquirir nuevos símbolos.

CURIOSIDADES

Robert Recorde en 1557 inventó, hace más de 400 años, las dos rayas = para indicar la igualdad, porque "dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas".

Las semejanzas son importantes de considerar para realizar el cambio desde el lenguaje común hacia un lenguaje algebraico de una forma correcta, y del mismo modo, hacen posible que las matemáticas presenten una aplicación práctica.

JUEGO 5 DIGITAL

Construcción de expresiones algebraicas

Recordemos que una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras que están unidos entre sí por las operaciones aritméticas de los números reales, es decir, sumar, restar, multiplicar, dividir.

Ejemplo:

$3 + 2x^2 - x$ o bien $xy - 32(xy^2 - y)$

Las literales representan valores que no conocemos y podemos considerarlas como la generalización de un número. Como habíamos descrito, las llamaremos variables.

La idea principal del álgebra es transformar un enunciado, donde hay uno o varios valores que no conocemos, en una expresión algebraica. Cada uno de los valores (variables) que no conocemos lo representaremos por una letra diferente.

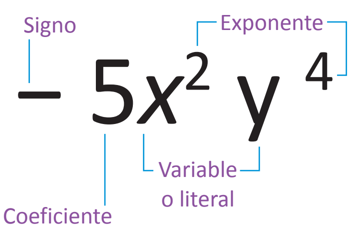
Generalizando, podemos decir que la notación algebraica es el medio por el cual se puede conocer los elementos que conforman una representación matemática; es decir, una **expresión algebraica**, que consideremos como una representación que se aplica a un conjunto de literales y números para conformar una o más operaciones algebraicas.

Ejemplo:

x ; $7z^2$; $2^a + 5\,b$; $\sqrt{8}\,x$; $\dfrac{x^1 + a^2}{x + a}$; etc.

En las expresiones algebraicas, las partes que aparecen separadas por el signo (+) o (–) recibirán el nombre de **términos algebraicos**.

Término algebraico y sus partes



Como expresamos anteriormente una **expresión algebraica** es un grupo de números o letras combinadas entre sí mediante una o más de las operaciones fundamentales, es decir, es una expresión que está constituida por uno o más términos.

Un término algebraico es entonces la expresión algebraica más simple que existe. En forma general, un término algebraico está compuesto por un signo, un coeficiente o constante, una literal o variable y un exponente:

Coeficiente

Este valor lo podemos definir como el factor numérico de un término, su principal característica es indicar las veces que debemos tomar los demás factores como sumandos.

Ejemplo:

$6ab^3 = ab^3 + ab^3 + ab^3 + ab^3 + ab^3 + ab^3$

$4m = m + m + m + m$

$-bx^2y^4$

Cuando no existe de forma visible un coeficiente, no se puede asegurar que no existe, la realidad es que posee el valor de “1” y no es necesario escribirlo, pero sí debemos considerarlo como tal.

Términos por el signo

Los términos van precedidos del signo (+) y los denominaremos “positivos”; los que van precedidos del signo (–) los denominaremos “negativos”. Cuando un término no es afectado por ningún signo, se considera positivo, ya que el signo (+) suele no escribirse en términos positivos. La variable y el exponente los hemos descrito ya anteriormente.

Clasificación de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican de acuerdo con el número de términos algebraicos que las componen, en la siguiente tabla expresamos sus diferencias visibles:

Nombre	Número de términos	Ejemplos
Monomio	Uno	3 $-2x$ $+\frac{1}{4}m^2r^3$ $5\ w$
Binomio	Dos	$\frac{1}{6}a^2 - \frac{3}{4}a$ $-4a^2\ b^4 + 3a^3b$ $2 - 3m^2\ r^3$ $\frac{5z}{6y} - \frac{3y}{9z}$
Trinomio	Tres	$a + b + c$ $4x^2 - 2x + 16$ $2a^2 - 3ab + 5b^3$ $\frac{1}{9}v - \frac{2}{15}u + 6w$
Polinomio	Más de un término	$a + b$ $4x^2 - 2x + 16$ $2a^2 - 3ab + 5b^4 + 6a^3b^3$ $x^2 - 2x + 2 + y$

Además del número de elementos las expresiones algebraicas también se pueden clasificar de acuerdo con la cantidad de variables que la expresión tenga; es decir, por la potencia a la cual están elevadas. La potencia no siempre debe ser un número, también pueden ser variables. Para conocer el grado de algún término se deben sumar los exponentes de cada variable dentro del mismo término. Veamos algunos ejemplos:

- $2x + 65x^2 + 0.27x^3$

Por simple inspección podemos asegurar que se trata de un polinomio de tres elementos, o sea un trinomio. En la expresión sólo hay una variable que es la *x*. Cada variable está elevada a una potencia diferente. El primer elemento, que es $2x$, está elevado a la uno, en el segundo elemento, que es $65x^2$, vemos que la variable está elevada a la dos o al cuadrado y en el tercer elemento, que es $0.27x^3$, vemos que la variable está elevada a la tres o al cubo.

Para clasificar las expresiones algebraicas de acuerdo con su grado se tomará el mayor grado de toda la expresión. Por lo tanto, concluimos que se trata de un trinomio, de una variable y de grado tres.

- $81a + 17b^2$ Binomio de dos variables (*a* y *b*) y de grado 2 o de segundo grado.
- $\frac{21}{5}x^7$ Monomio de grado 7.

Grado de una expresión algebraica

El grado de un polinomio $P(x)$ es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x. Para su estudio algebraico en los términos encontramos tres tipos de grado: absoluto, relativo y polinominal.

Grado absoluto de un término

Se denomina grado absoluto de un término algebraico a la suma de los exponentes de sus factores literales.

Ejemplo:

$3x^3$, este término es de grado tres, pues la máxima potencia es 3.

$-5x^2y^3$, en este caso el grado es 5, debido a que la suma de los exponentes de sus factores literales es $2 + 3 = 5$.

Grado relativo de un término

Este grado está determinado por el exponente de la variable considerada o que nos sirva de punto de análisis.

Ejemplo:

$5x^3y^2$; en este caso, se establecen dos grados:

- Es de grado 3 con respecto a la variable “*x*”.
- Es de grado 2 con respecto a la variable “*y*”.

Grado polinominal

En un polinomio su grado estará determinado por el término de mayor grado absoluto.

Ejemplo:

En $2x^3y+5xy^2-xz+1$, se trata de un polinomio de grado 4.

La justificación es simple: observa que el término $2x^3y$ posee un grado absoluto de 4, esto debido a que la potencia de la variable x es 3 y la potencia de la variable y es 1, entonces $3 + 1 = 4$, que es justamente el grado del polinomio.

Por otro lado, si pensamos en el grado relativo del polinomio, se realizará respecto de una variable, entonces en este caso, es el mayor exponente con que figura dicha variable. De tal forma que en el ejemplo anterior es de grado 3 respecto de x, de grado 2 respecto de y, de grado 1 respecto de z.

En algunos casos se acostumbra colocarle un nombre al grado al que nos referimos. Los nombres de los grados más comunes cuando conocemos el grado de los términos son:

Grado	0	1	2	3	4	5
Nombre	Constante	Lineal	Cuadrático	Cúbico	Cuártico	Quíntico

Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las letras por valores numéricos dados y efectuar después las operaciones indicadas.

Una expresión algebraica es una **identidad**, es decir, la expresión se iguala a un valor. Hasta este momento ya hemos definido que la incógnita o variable puede adoptar cualquier valor y, por lo tanto, la igualdad siempre se cumplirá. Esto es el principio de resolución de una ecuación, pues es necesario encontrar la solución; es decir, el valor de la incógnita o variable, pues ésta tiene un valor específico que hace posible la identidad.

La cantidad de soluciones para la incógnita en una ecuación está dada por el grado absoluto de la expresión algebraica.

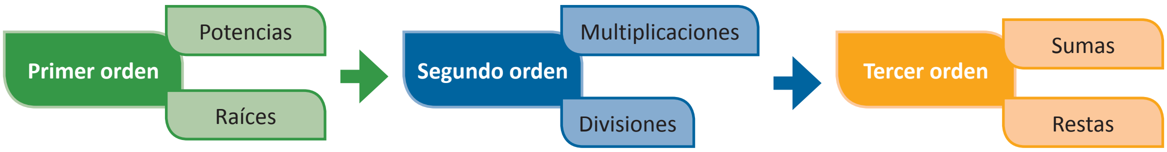
- Si es de primer grado sólo tiene una solución.
- Cuando es de segundo grado tendrá, a lo más, dos soluciones reales; es decir, la incógnita puede adoptar dos valores diferentes y la igualdad se debe cumplir con cualquiera de las dos soluciones.

- Al ser de tercer grado o cúbica, tendrá a lo más tres soluciones... y así sucesivamente.

Un sencillo procedimiento consiste en: si conocemos el valor de las incógnitas para una expresión algebraica, lo sustituimos en ésta y procederemos a encontrar el valor numérico, o bien, comprobamos la igualdad.

Las variables representan una infinidad de valores que adquieren algún valor para cierta situación en particular, por eso es necesario saber evaluar una expresión algebraica con algunos valores en las variables. Cuando evaluamos una expresión algebraica, es necesario sustituir en la expresión, el valor de la variable que estamos empelando, esta sustitución la realizamos utilizando paréntesis dentro de los cuales escribimos los valores que están determinados para la variable.

Para realizar las operaciones con los valores de las variables, es necesario considerar la jerarquía de las operaciones, en el siguiente esquema mostramos esa jerarquía para las operaciones básicas: potencia, radicación, producto, división, suma y resta:



Lo anterior significa que las operaciones se realizan en el orden que aparecen en la tabla de jerarquía independientemente del orden en que aparecen, lo único que altera el arreglo es el uso de signos de agrupación; es decir, el empleo de paréntesis.

Ejemplo:

Si $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$ y $d = 4$, calcular las siguientes operaciones.

A. $2a + 3b - 4c - d =$ para resolver el problema, es decir, encontrar el valor numérico de la expresión, sustituimos los valores propuestos en la expresión, es decir: $2a + 3b - 4c - d = 2(3) + 3(2) - 4(5) - (4) = 6 + 6 - 20 - 4 = -12$

B. $5a - 8b + 4c + 2d = 5(3) - 8(2) + 4(5) + 2(4) = 15 - 16 + 20 + 8 = 27$

C. $\dfrac{4b - 2c + d}{5a} = \dfrac{4(2) - 2(5) + (4)}{5(3)} = \dfrac{8 - 10 + 4}{15} = \dfrac{2}{15}$

D. $(2b - 4c)(3d - 2d) = (2(2) - 4(5))(3(4) - 2(4)) = (4 - 20)(12-8) = (-16)(4) = -64$

Actividad de cierre

Atención

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se proporcionan.

1. $19x + y$; cuando $x = 5$, $y = 8$
2. $\dfrac{xy}{38}$; cuando $x = 2$, $y = 6$
3. $(2x)^3$; cuando $x = 5$
4. $\dfrac{a^2 - b^2}{a}$; cuando $a = 3$, $b = 5$
5. $\dfrac{1}{3}x^3 + 3y$; cuando $x = 2$, $y = 3$

2. Verifica tus resultados con un compañero, luego compártanlos con el resto del grupo.

Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 1.2" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.

1. Completa el diagrama de la clasificación de las expresiones algebraicas de acuerdo con la cantidad de elementos que las componen.

- **Expresiones algebraicas**
  - **Monomios**
    - $3a$
    - $-7xz$
    - $-\frac{97}{x^2y}$
  - ______
    - ______
      - $97x + 0.2y$
    - ______
      - $-7 + 8.2x^2 - 66y$
    - **Más de tres términos**
      - $\frac{97}{y^2} + a - 8y + 0.25x$

Realiza tu evaluación parcial.

1. Traduce los casos de la vida cotidiana del lenguaje común al lenguaje algebraico

   a. Compramos 5 cuadernos y 3 lápices. ¿Cuánto pagamos?

   ____

   b. Para pintar un muro necesitamos 100 litros de pintura ¿Cuánta pintura necesitamos por metro cuadrado?

   ____

2. Sustituye los siguientes valores de los ejercicios anteriores y da el resultado:

   a. Precio del cuaderno = 12 pesos. Precio del lápiz = 4 pesos.

   ____

   b. Área del muro 150 metros cuadrados.

   ____

Valor: 5 puntos

Actividad de evaluación 1.2.1

Responsabilidad

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

TIC

EVALUACIÓN

RÚBRICA

1. De forma individual, resuelve en tu cuaderno la serie de ejercicios propuesta en tres partes, traduciendo del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Parte 1. Conversión de números reales del lenguaje común a lenguaje algebraico

1. Traduce los casos de la vida cotidiana del lenguaje común al lenguaje algebraico.

1. Cuando compramos 3 kilos de tortillas. ¿Cuánto pagamos?
2. Tenemos 1 000 pesos en el banco y depositamos 8 quincenas. ¿Cuánto tenemos en el banco?
3. Compramos 5 manzanas y 4 peras. ¿Cuál es el costo de lo que compramos?
4. Una terraza está hecha con 100 azulejos rectangulares. ¿Cuál es el área de la terraza?
5. Compramos 25 bolillos, por un descuento nos regresan 10 pesos al pagar ¿Cuánto pagamos?

- Sustituye los siguientes valores de los ejercicios anteriores y da el resultado:

1. Precio del kilo de tortilla = 10 pesos.
2. Quincena = 1 500 pesos.
3. Precio de la manzana = 3 pesos. Precio de la pera = 5 pesos.
4. Largo del azulejo = 30 centímetros. Ancho del azulejo 25 centímetros.
5. Precio del bolillo = 1.25 pesos.

- Realiza el análisis aplicando la metodología descrita y compleméntalo con una tabla de comentarios.
- Traza un dibujo o esquema representativo para cada ejercicio colocando todos los datos que involucran los problemas.

Parte 2. Conversión de figuras geométricas del lenguaje común a lenguaje algebraico

1. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados en lenguaje común.

a. El 30% de un número.
b. El área de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.
c. El perímetro de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.
d. El doble del resultado de sumarle a un número entero su siguiente.
e. La mitad del resultado de sumarle 3 a un número.
f. La tercera parte del área de un rectángulo en el que la base mide el doble que la altura.
g. El cuadrado de la suma de dos números enteros consecutivos.
h. La media de un número y su cuádruplo.

- Realiza el análisis aplicando la metodología descrita y compleméntalo con una tabla de comentarios.
- Traza un dibujo o esquema representativo para cada ejercicio colocando todos los datos que involucran los problemas.

Parte 3. Conversión de fórmulas físicas o químicas, o biológicas de lenguaje algebraico a lenguaje común

1. Interpreta a lenguaje algebraico de fórmulas propuestas.
   a. Velocidad: $v = \frac{d}{t}$, d = distancia, t = tiempo.
   b. Fuerza: $F = ma$, m = masa, a = aceleración.
   c. Ley de la gravedad: $F = G\frac{mM}{r^2}$, G = constante de gravedad, m = primera masa, M = segunda masa, r = distancia entre masas.
   d. Energía cinética: $E = \frac{1}{2} mv^2$, m = masa, v = velocidad.
   e. Resistencia eléctrica: $R = \frac{U}{I}$, U = potencial, I = corriente eléctrica.

- Realiza el análisis aplicando la metodología descrita y compleméntalo con una tabla de comentarios.
- Traza un dibujo o esquema representativo para cada ejercicio colocando todos los datos que involucran los problemas.

2. Al finalizar, copia los ejercicios de las tres partes en un documento de Word, incluyendo tu análisis, tabla de comentario y esquema representativo de cada uno.
3. Revisa que la redacción de tu trabajo tenga orden, claridad, concisión y precisión, y la ortografía sea correcta.
4. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos, profesor, fecha, número de evaluación y los datos de la serie de ejercicios.
5. Antes de entregar a su profesor, en documento de Word, tu trabajo, realiza tu "Autoevaluación 1.2.1" que se encuentra al final de esta unidad en la sección "Instrumentos de evaluación". Revisa si cumpliste con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de entregarlo.
6. Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo en Word impreso a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza; es decir, que no estén arrugadas ni manchadas.

NO ABANDONO

"Las matemáticas puras son, en su forma,
la poesía de las ideas lógicas".

Albert Einstein

Notas

Lee con atención los siguientes ejercicios, realiza las operaciones y rellena completamente el círculo que corresponda a la respuesta correcta.

1. ¿Qué tipo de números son los que incluyen el conjunto de los reales?

a) Sólo las fracciones y los decimales.
b) Sólo los enteros positivos y negativos.
c) Excepto las fracciones, decimales y enteros.
d) Cualquier número que se presente en la recta numérica.

2. ¿Cuál de los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales?

a) $\frac{3}{4}$
b) 0.5
c) π
d) Todos los anteriores.

3. ¿Cuál de los siguientes números es entero?

a) $\frac{1}{20}$
b) -8.7
c) $-2\frac{1}{2}$
d) -3

4. ¿Cuál de los siguientes números es racional?

a) π
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{3}{5}$
d) e

5. ¿Qué número es opuesto a –110?

a) –111
b) –101
c) 110
d) 101

6. Identifica la expresión que representa a la siguiente resta en términos de suma.

a) 21 + (–16)
b) –21 + 16
b) (–21) + 16
d) (21) + (16)

7. Identifica la expresión donde es conveniente aplicar la propiedad conmutativa y asociativa a la suma.

a) 10 + 25 + (–4) + (–12)
b) $4 + -\frac{1}{2} + 8\,(-2)$
b) –16 + (–45) + (–20) + (–5)
d) 5 + 13 + 8 + 2

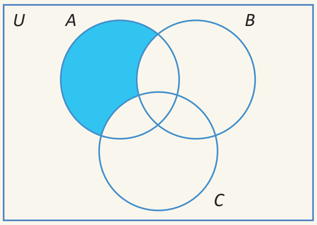
8. Dado el conjunto universo U = {alumnos que practican deporte} y los conjuntos formados por:

A {alumnos que practican futbol}

B {alumnos que practican volibol}

C {alumnos que practican atletismo}

La parte sombreada ¿qué conjunto representa?



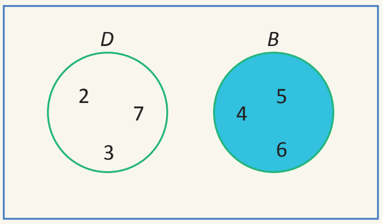
(a) Alumnos que practican futbol que no practican volibol ni atletismo.

(b) Alumnos que practican volibol que no practican futbol ni atletismo.

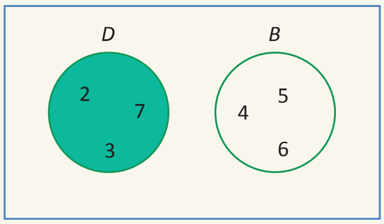
(c) Alumnos que practican futbol que no practican atletismo.

(d) Alumnos que practican atletismo que no practican volibol ni futbol.

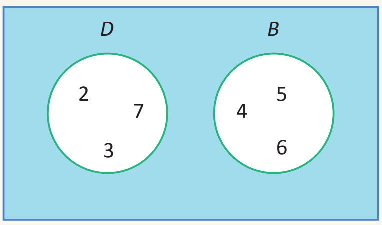
9. Selecciona el diagrama de Venn que representa el resultado de la siguiente operación: $D - B$



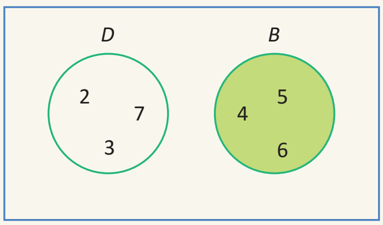
$D — B = \{4, 5, 6\}$



$D — B = \{2, 3, 7\}$



$D — B = \emptyset$



$D — B = \{4, 5, 6\}$

10. Tres autores escribieron un libro, cada uno hizo diferente cantidad de temas por lo que su pago no es proporcional. Si recibieron un pago total de \$80 000.00, y cada uno recibió la siguiente cantidad de dinero:

Autor 1 cobró 28 000.00 (veintiocho mil pesos 00/M.N.)

Autor 2 cobró 12 000.00 (doce mil pesos 00/M.N.)

Autor 3 cobró 40 000.00 (cuarenta mil pesos 00/M.N.)

¿Qué porcentaje cobró cada uno?

(a) Autor 1 (15%); Autor 2 (10%); Autor 3 (50%).

(b) Autor 1 (30%); Autor 2 (20%); Autor 3 (50%).

(c) Autor 1 (35%); Autor 2 (15%); Autor 3 (50%).

(d) Autor 1 (50%); Autor 2 (15%); Autor 3 (35%).

Autoevaluación

Evalúa los indicadores de aprendizaje de cada actividad de evaluación parcial para conocer la calificación que estás en posibilidad de obtener en la rúbrica según tu desempeño. Marca una ✔ en cada indicador logrado.

Para obtener Suficiente, deberás cubrir todos los indicadores del tono más claro, y para lograr Excelente, todos los indicadores de ambos tonos.

Suficiente **Excelente**

Rúbrica 1.1.1

Módulo: Manejo de espacios y cantidades.	**Grupo:**
Nombre del alumno:	**Fecha:**
Resultado de aprendizaje (RA): **1.1** Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales y la aplicación de sus operaciones básicas.	**Actividad de evaluación:** **1.1.1 R**esuelve la serie de ejercicios propuesta, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social, aplicando el conjunto de los números reales.

Porcentaje	✔	Indicador logrado
Aplicación de conjuntos 30%		Resolví cuatro ejercicios y apliqué las propiedades de conjuntos en los números reales, empleando las herramientas matemáticas (operaciones y fórmulas).
		Desarrollé a detalle el procedimiento seguido para llegar a la solución.
		Representé en notación de conjunto y diagramas de Venn los resultados obtenidos.
		Además de los indicadores anteriores, expliqué los resultados obtenidos paso por paso textualmente.
Aplicación de números reales 30%		Resolví operaciones que transforme sistemas de numeración de diferente base a base diez.
		Expresé el desarrollo de mi resultado.
		Además de lo anterior, transformé operaciones de base diez a diferente base expresando el desarrollo de mi resultado.
Serie de ejercicios 40%		Calculé porcentajes, proporción directa y proporción inversa de una serie de ejercicios.
		Incluí operaciones realizadas de cada serie de ejercicios.
		Consideré la limpieza de mi presentación, la ortografía, y el orden, claridad, concisión y precisión de la redacción de los procedimientos y métodos aplicados.
		Realicé una portada para mi trabajo con el nombre del módulo y los datos de la serie de ejercicios.
		Además de lo anterior, construí una tabla de valores de proporción directa e inversa y describí las diferencias de cada una.
	100%	

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el Resultado de Aprendizaje 1.1 y solicita a tu maestro una segunda oportunidad de valoración.

Marca una ✔ en cada indicador logrado.

Rúbrica 1.2.1		
Módulo: Manejo de espacios y cantidades.	**Grupo:**	
Nombre del alumno:	**Fecha:**	
Resultado de aprendizaje (RA): 1.1 Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales y la aplicación de sus operaciones básicas.	**Actividad de evaluación:** **1.2.1** Traduce casos de la vida cotidiana del lenguaje común al lenguaje algebraico.	
Porcentaje	✔	**Indicador logrado**
Conversión de números reales del lenguaje común a lenguaje algebraico 35%		Interpreté a leguaje algebraico cinco ejercicios propuestos de números reales.
		Realicé el análisis correspondiente, aplicando la metodología descrita y lo complementé con tabla de comentarios.
		Además de lo anterior, tracé un dibujo o esquema representativo para cada ejercicio colocando todos los datos que involucran los problemas.
Conversión de figuras geométricas del lenguaje común a lenguaje algebraico 35%		Interpreté a lenguaje algebraico 5 fórmulas propuestas sobre figuras geométricas.
		Realicé el análisis; aplicando la metodología descrita y lo complementé con tabla de comentarios.
		Además de lo anterior, tracé un dibujo o esquema representativo para cada ejercicio colocando todos los datos que involucran los problemas.
Conversión de fórmulas físicas o químicas, o biológicas de lenguaje algebraico a lenguaje común 30%		Interpreté a lenguaje algebraico las fórmulas físicas, químicas o biológicas propuestas.
		Realicé el análisis; aplicando la metodología descrita y lo complementé con tabla de comentarios.
		Además de lo anterior, tracé un dibujo o esquema representativo para cada ejercicio colocando todos los datos que involucran los problemas.
	100%	

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el RA 1.2 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Heteroevaluación

De acuerdo con el desempeño de sus alumnos, anote el peso logrado en cada actividad realizada. Sume los porcentajes para obtener el peso para la unidad.

<table>
<tr><th colspan="9">Tabla de ponderación</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Unidad</th><th rowspan="2">RA</th><th rowspan="2">Actividad de evaluación</th><th colspan="3">Aspectos a evaluar</th><th rowspan="2">% Peso específico</th><th rowspan="2">% Peso logrado</th><th rowspan="2">% Peso acumulado</th></tr>
<tr><th>C</th><th>P</th><th>A</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades</td><td>1.1. Representa situaciones o fenómenos de la vida cotidiana, en términos cuantitativos, empleando el conjunto de los números reales y la aplicación de sus operaciones básicas.</td><td>1.1.1</td><td>▲</td><td>▲</td><td>▲</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2 Plantea problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.</td><td>1.2.1</td><td>▲</td><td>▲</td><td>▲</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">% peso para la unidad 1</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Peso total del módulo</td><td>100</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Al término de la última unidad, sume el peso logrado en todas las unidades y obtenga el total del módulo.

Coevaluación

Trabaja con un compañero para que se evalúen mutuamente. Escribe los datos de tu compañero en la tabla siguiente.

Evalúa las competencias genéricas de tu compañero, conforme los indicadores de la tabla colocando una "X" en la casilla correspondiente.

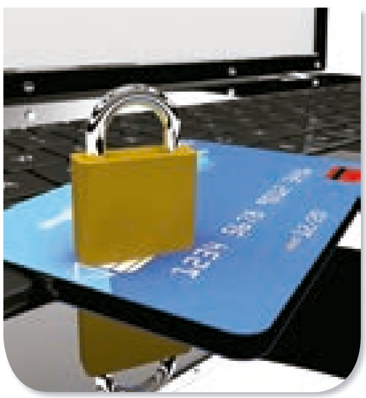
Nombre de mi compañero:				
Carrera:		**Nombre del módulo:**		
Semestre:		**Grupo:**		
Competencias genéricas	**Atributos**	**Con frecuencia**	**Algunas ocasiones**	**Nunca**
Se autodermina y cuida de sí				
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.			
	Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.			
	Participa en prácticas relacionadas con el arte.			
Se expresa y comunica				
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.			
Piensa crítica y reflexivamente				
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez			
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.			
Aprende de forma autónoma				
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.			
Trabaja en forma colaborativa				
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.			
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.			
Participa con responsabilidad en la sociedad				
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.			
	Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.			

Cultura financiera y para el consumo

En esta sección, pondrás en práctica estrategias para que administres y planifiques tu dinero; desarrolles una actitud crítica hacia el consumo, y conozcas tus derechos y deberes como consumidor. Esto con el fin de que seas capaz de decidir qué consumir, cómo hacerlo y por qué, y bases tus decisiones en el valor real que para ti tienen los productos, según tus necesidades y deseos.

La identidad en el uso de instrumentos financieros

"Ni la muerte, ni la fatalidad, ni la ansiedad, pueden producir la insoportable desesperación que resulta de perder la propia identidad".
Howard Phillips Lovecraft (1890-1937), escritor estadounidense



¿Sabes qué es la "identidad"? Ésta es todo aquello que nos define como individuos. **La identidad es un derecho**, que inicia con tu registro en el acta de nacimiento; con ello tienes accesos a otros derechos. Actualmente cuando se dice "me robaron mi identidad" significa que alguien roba tu información personal y financiera para suplantar tu identidad y obtener beneficios en tu nombre. Cuando esto sucede ¿qué pasa?

- Tu derecho a la identidad es violentado y con ello otros derechos.
- Pierdes dinero.
- Dañan tu reputación financiera.

Esto se conoce en inglés como "*phishing*" (en español: "suplantación de identidad") es una modalidad de estafa con el objetivo de intentar obtener de un usuario sus datos, claves, cuentas bancarias, números de tarjeta de crédito, identidades, etc. Resumiendo "todos los datos posibles" para luego ser usados de forma fraudulenta.

También se realizan fraudes a través de la "**clonación**"; mediante un pequeño dispositivo, llamado en inglés *skimmer*, los delincuentes copian y almacenan los datos de la banda magnética de tu tarjeta, esto cuando pagas o retiras dinero en un cajero automático. ¿Quieres evitar caer en alguno de estos fraudes? Te recomendamos seguir los siguientes tips.

Primer TIP. Evita el *phishing* y la clonación

1. Los ladrones de identidad emplean varios métodos para acceder a tu información, te decimos cómo identificarlos:
   - Envío de correos electrónicos que simulan ser de una institución legítima. Para evitar que te pesquen: no respondas a ningún correo electrónico donde te soliciten información personal o financiera, NO DES CLIC EN LOS HIPERVÍNCULOS.
   - Ningún banco solicita información confidencial sobre tu cuenta a través de un correo electrónico, no la proporciones.
   - Nunca pierdas de vista tu tarjeta, y no permitas que la tomen extraños que no tienen que ver con la transacción.
   - Solicita que te lleven la terminal a la vista, pueden llegar a sustituirla o realizar cobros indebidos.
   - En cajeros automáticos verifica que el lector de tarjetas no contenga dispositivos extraños.

Lo que debes saber

El instituto Nacional de Transparencia y Acceso a la Información y Protección de Datos personales (INAI) emitió la *Guía para prevenir el robo de identidad*, en la que proporciona información relevante sobre el robo de identidad y da a conocer herramientas para proteger datos personales que reducen el riesgo de que la identidad de una persona sea robada.

De igual forma, explica qué hacer y ante quién acudir en caso de haber sido víctima de robo de identidad. Consulta esta Guía en el siguiente link:

http://inicio.ifai.org.mx/nuevo/Guia%20Robo%20Identidad.pdf

Segundo TIP. Transferencias electrónicas

1. La transferencia electrónica de fondos (TEF) implica cualquier transferencia de fondos que se realiza desde una cuenta de cheques, inversiones o tarjeta de débito a otra por medios electrónicos, sin ningún intercambio de dinero en efectivo. Este tipo de instrumento financiero, si se utiliza bien, es un instrumento muy seguro. Tiene las siguientes características:
   - El que envía los recursos como el que lo recibe, debe tener una cuenta de cheques o de tarjeta de débito.
   - Cuando se trata de transferencia entre distintos bancos, la cuenta **clabe** (clave bancaria estandarizada) de quien recibe es indispensable.
   - La **clabe** consta de 18 dígitos y es un número único e irrepetible, asignado a una cuenta y sirve para recibir depósitos en medios electrónicos.
2. La transferencia electrónica de fondos es tan confiable que se utiliza comúnmente para depósito de salarios en cuentas de nóminas, pago de servicios domiciliados y pagos a terceros. No obstante, se deben seguir mínimo estas recomendaciones:
   - Nunca utilices computadoras públicas o que no cuenten con programas de seguridad adecuados, ya que quedan rastros de información de los usuarios.
   - Conserva tus comprobantes para poder realizar reclamaciones en caso de cobros indebidos.
   - Revisa tu estado de cuenta de manera periódica para supervisar los movimientos.
3. Investiga qué otras acciones debes realizar para que tus datos personales no sean usados indebidamente. En clase con mediante lluvia de ideas (que previamente investigaron), construyan un mapa mental de recomendaciones que no ´´se han mencionado en los puntos anteriores.

¿Cómo simplificas expresiones algebraicas?

¿Cómo te expresas matemáticamente?

Unidad 2

MANEJO DE OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

30 horas

"Muchos niños latinos deberían ser científicos, porque necesitamos científicos de todo el mundo y de todos los antecedentes".

Mario Molina, químico y Nobel mexicano

NO ABANDONO

Competencias genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Competencias disciplinares de matemáticas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

VIDEO 2 DIGITAL

El fin de Arquímedes

Creo que si a un grupo de matemáticos se les preguntase quién fue el matemático más grande de la antigüedad, el sufragio resultaría apabullante en favor de Arquímedes. La anécdota acerca de su muerte es comparable en popularidad con la del invento del ajedrez, pero con más visos de verosimilitud. Creo que merece la pena conocer la historia del fin de Arquímedes.

Los hechos los narra Plutarco en sus *Vidas paralelas*, en la correspondiente a Marcelo, un general romano que durante la Segunda Guerra Púnica quiso tomar Siracusa —de frente y por derecho, como diría algún **tauró-mano**—, donde reinaba Hierón y vivía su amigo y pariente Arquímedes. Marcelo, muy seguro de sí, decidió atacar por tierra y por mar llevando consigo una máquina con nombre de baile brasileño, pues la llamaban sambuca, por su parecido con este instrumento semejante a un arpa. La sambuca en cuestión constaba de un gran puente apoyado en ocho embarcaciones ligadas entre sí, sobre el que estaba la máquina para atacar los muros. Pero la guerra científica había comenzado con Arquímedes, que había logrado construir una serie de máquinas mecánicas que pronto dieron buena cuenta de los asaltantes. Ya de entrada, cuando la sambuca se hallaba lejos, una de las máquinas de Arquímedes le lanzó una piedra de unos 30 kg que la destrozó por completo. El resto, según la versión de Plutarco, debió causar sensación; mediante grandes maderos con un pico semejante al de las grullas, los defensores cogían a las naves atacantes y alzándolas en el aire mediante unos contrapesos, las hundían

Glosario

Taurómano: persona aficionada a las corridas de toros.

La muerte de Arquímedes, ilustración grabada, en Magasin Pittoresque, 1877.

después en el mar. Según parece, Arquímedes había preparado un buen surtido de artilugios que hicieron retirarse al orgulloso Marcelo con el rabo entre las piernas, según el vulgar dicho.

El final de la operación, y con ella el de Arquímedes, fue más triste. Marcelo, ya entrado en razón, recurrió a la traición de un espartano llamado Damasipo, quien les facilitó el acceso a los asaltantes, precisamente cuando los siracusanos, por celebrar la fiesta de Diana, estaban **beodos**, lo que ocasionó su derrota. La operación tuvo lugar por la noche, y al amanecer Marcelo ya era dueño de la cuidad, cuando empezó el saqueo y la matanza.

Arquímedes —según la versión— se hallaba entregado al examen de cierta figura matemática que había dibujado en la arena, como era costumbre, y abstraído en su trabajo no se dio cuenta de la toma de la ciudad. Repentinamente se presentó un soldado invitándole a acompañarle a casa de Marcelo. Pero Arquímedes no quiso seguirle antes de resolver el problema que tenía entre manos, a lo que el soldado, irritado desvainó su espada y le dio muerte.

Otra versión es que el soldado se presentó con la espada desnuda dispuesto a matarle; que Arquímedes le rogó que esperase a que hubiera resuelto su problema, de lo que no hizo caso el soldado.

Una tercera versión explica que Arquímedes llevaba a Marcelo diversos instrumentos científicos para observar el Sol, y que al toparse con él un grupo de soldados creyeron que eran objetos de oro, dándole muerte para apoderarse de ellos.

Según parece, Marcelo sintió profundamente lo ocurrido, mostró su desprecio hacia el autor del magnicidio y trató a los deudos de Arquímedes con el mayor aprecio y distinción. Pero como dijo el filósofo inglés Whitehead y cita Bell en su obra *Men of Mathematics*: "Ningún romano perdió su vida porque se hallase absorto en la contemplación de una figura matemática".

Glosario

Beodo: embriagado, borracho.

Mariano Mataix, *Historias de matemáticos y algunos problemas*, Boixareu Editores, 1986, p. 56.

NO ABANDONO

"Las matemáticas son un lugar donde puedes hacer cosas que no puedes hacer en el mundo real".

Marcus du Sautoy

Evaluación de comprensión lectora

Con base en el texto anterior, lee las siguientes preguntas y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Quién fue el matemático más grande de la antigüedad, según la mayoría de los matemáticos?

   (a) Newton.

   (b) Pitágoras.

   (c) Arquímedes.

   (d) Gauss.

2. ¿Cuál es el nombre de la guerra de la que habla el texto?

   (a) Primera Guerra Púnica.

   (b) Segunda Guerra Púnica.

   (c) Primera Cruzada.

   (d) Guerras Gálicas.

3. ¿Quién fue el general que quiso tomar Siracusa?

   (a) Marcelo.

   (b) Armando.

   (c) Damasipo.

   (b) Plutarco.

4. ¿Qué hacía Arquímedes durante la invasión de Siracusa según la mayoría de las versiones?

   (a) Le llevaba a Marcelo diversos instrumentos científicos para observar el Sol.

   (b) Dormía.

   (c) Se hallaba entregado al examen de cierta figura matemática que había dibujado en la arena.

   (d) Celebraba la fiesta de Diana.

5. ¿Cuál fue la reacción de Marcelo al enterarse de la muerte de Arquímedes?

   (a) Premió al autor de la muerte.

   (b) Mostró su desprecio hacia el autor de la muerte.

   (c) Festejo la muerte de Arquímedes.

   (d) No hizo nada.

Resuelve cada problema y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuáles de las siguientes fracciones está más cerca de cero?

   (a) $-\frac{2}{5}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $-\frac{1}{12}$

2. Un cierto mapa usa una escala donde un centímetro es igual a 10 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros son representados por 5 centímetros en ese mapa?

   (a) 63   (b) 50   (c) 36   (d) 69   (e) – 69

3. Si 50% de un número es 30, ¿cuál es el 10% de ese número?

   (a) 10   (b) 15   (c) 6   (d) 9

4. El precio original de una bicicleta nueva es de $150.00. Si la bicicleta tiene un descuento de 20%, ¿cuál es el nuevo precio de la bicicleta?

   (a) 100   (b) 120   (c) 116   (d) 112

5. Multiplicación de fracciones.

   (a) $\frac{7}{16} \cdot \frac{1}{6} =$ (b) $\frac{10}{18} \cdot \frac{6}{5} =$ (c) $\frac{12}{27} \cdot \frac{9}{5} =$ (d) $\frac{6}{13} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{14}{6} =$

6. División de fracciones.

   (a) $\frac{9}{16} \div \frac{9}{4} =$ (b) $\frac{11}{12} \div \frac{8}{3} =$

7. Una mañana la temperatura estaba 3 grados bajo cero, para la tarde la temperatura aumentó 25, y bajó para la noche 8 grados. ¿Cuál fue la temperatura de la noche?

   (a) 12   (b) 14   (c) 16   (d) 18

8. En la ecuación $y + 3x = 9$. ¿Cuál es el valor de y si $x = 0$?

   (a) 6   (b) 7   (c) 9   (d) −6

9. ¿Qué punto está más cerca de $\frac{5}{3}$ en la línea numérica? Explica tu respuesta.

   (a) Punto A
   (b) Punto B
   (c) Punto C
   (d) Punto D

   ________ 0 ________ 1 ________ 2 ________ 3 ________ 4 ________

   A   B   C   D   E

10. ¿Qué fracción es más grande?

   (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{6}$ (d) $\frac{2}{8}$

2.1 Resuelve problemas de la vida cotidiana, aplicando operaciones aritméticas básicas exponentes y radicales con expresiones algebraicas

NO ABANDONO

"Dénme un punto de apoyo
y moveré el mundo".
Arquímedes

En la unidad 1 aprendiste algunos conceptos básicos y varias reglas y leyes para realizar operaciones con números reales, así como una introducción al lenguaje del álgebra. En esta unidad conocerás las herramientas básicas para realizar operaciones algebraicas, es decir, los procedimientos para resolver problemas algebraicos, que será necesario dominar antes de pasar a la unidad 3, donde verás ya su aplicación de manera más profunda.

Como aprendiste en la unidad 1, un polinomio es una expresión algebraica formada por dos términos o más. Los binomios y trinomios son polinomios con nombres especiales, pues consisten de dos o tres términos respectivamente. Un polinomio es una de las expresiones algebraicas más usadas en las matemáticas. Con ellas se pueden representar muchas cosas, como cuando se predice lo representado en la construcción 2D para calcular el material que es necesario en una cierta área disponible, por mencionar sólo un ejemplo real. En los temas siguientes continuaremos trabajando con polinomios.

Actividad de inicio

Curiosidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- **Disciplinar:** 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

ATRIBUTO

- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos

1. En pareja, realicen lo siguiente:

a. Piensen en un número cualquiera.

b. Multiplíquenlo por 4.

c. Al resultado súmenle 15.

d. Al resultado súmenle el número que pensaron.

e. Al resultado divídanlo entre 5.

f. Al resultado súmenle 6.

g. Al resultado réstenle el número que pensaron.

2. Verán que el resultado siempre es 9. ¿Por qué? Encuentren la respuesta al problema y compartan sus conclusiones con sus compañeros de grupo.

Desarrollo de operaciones algebraicas

JUEGO 6 DIGITAL

Como ya viste en la unidad 1, un **monomio** es la representación algebraica más elemental, y sus componentes son: signo, coeficiente, literal (o literales) y exponente (o exponentes, pues cada literal tendrá su propio exponente). En una expresión algebraica una literal representa a un número cualquiera.

Signo

Exponentes

$$-4x^2y^5$$

Literales

Coeficiente

Términos semejantes

Dos o más monomios se llaman **términos semejantes** cuando tienen las mismas partes literales afectadas de iguales exponentes.

Ejemplos:

1. $2a$ y a
2. $-2b$ y $8b$
3. $-5a3b^2$ y $-8a3b^2$
4. x^{m+1} y $3x^{m+1}$
5. Los términos $4ab$ y $-6a^2b$ no son semejantes ya que el exponente de la literal a es 1 en el primer término y 2 en el segundo término.
6. $-bx^4$ y ax^4 no son semejantes ya que no tienen las mismas literales.

La reducción de términos semejantes es una operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes. La regla que deberemos seguir es sumar o restar los coeficientes de los términos semejantes.

Ejemplos:

- $3a + 2a = (3 + 2)a = 5a$
- $2ab + 3ab = (2 + 3)ab = 5ab$
- $-5b - 7b = (-5 - 7)b = -12b$
- $-\frac{1}{3}xy - \frac{2}{3}xy = (-\frac{1}{3} - \frac{2}{3})xy = -xy$
- $-a^2 - 9a^2 = (-1 - 9)a^2 = -10a^2$
- $5a - 8a + a - 6a + 21a = (5 - 8 + 1 - 6 + 21)a = 13a$
- $-\frac{2}{5}bx^2 + \frac{1}{5}bx^2 + \frac{3}{5}bx^2 - 4bx^2 + bx^2 = (-\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} - 4 + 1)bx^2 = -\frac{13}{5}bx$

NO ABANDONO

“Con números se puede demostrar cualquier cosa”.
Thomas Carlyle, historiador, pensador y ensayista británico

Actividad de desarrollo

Tesón

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

ATRIBUTO

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

1. De manera individual, realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios de reducción de polinomios:

1. $x + 2x$
2. $8a + 9a$
3. $11b + 9b$
4. $-b - 5b$
5. $-8m - m$
6. $-9m - 7m$
7. $4ax + 5ax$
8. $6a^{x+1} + 8a^{x+1}$
9. $-m^{x+1} + 5m^{x+1}$
10. $-3a^{x-2} - a^{x-2}$
11. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$
12. $\frac{3}{5}ab + \frac{1}{10}ab$
13. $\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}xy$
14. $-\frac{1}{5}xy - \frac{4}{5}xy$
15. $\frac{5}{6}a^2 - \frac{1}{8}a^2$
16. $9a - 3a + 5a$
17. $-8x + 9x - x$
18. $12mn - 23mn - 5mn$
19. $-x + 19x - 18x$
20. $19m - 10m + 6m$
21. $-11ab - 15ab + 26ab$
22. $-5a^x + 9a^x - 35a^x$
23. $-24a^{x+2} - 15a^{x+2} + 39a^{x+2}$
24. $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}y - y$
25. $-\frac{3}{5}m + \frac{1}{4}m - \frac{1}{2}m$

2. Comparte el proceso de tus operaciones con tus compañeros y contrasta los resultados. Si tienen diferencias, lleguen entre todos al resultado correcto.

Adición y sustracción de polinomios

Un polinomio es una suma de monomios con una sola literal. Esa expresión será de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. A los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ los llamamos coeficientes del polinomio y le diremos grado del polinomio al exponente más grande para el cual el coeficiente a_n es distinto de cero.

Ejemplos:

1. $2x^4 + 3x^2 + 4x - 2$ es de grado 4.
2. $-7x^9 + 3x - 5$ es de grado 9.

Cuando sumamos (o restamos) polinomios, identificamos qué monomios del primer polinomio son semejantes a los del segundo polinomio y sumaremos (o restaremos) estos monomios semejantes.

Ejemplos:

1. $(3x^2 + 5x - 1) + (-5x^2 + x - 2) = -2x^2 + 6x - 3$, ya que:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 1 \\ + \ -5x^2 + \ \ x - 2 \\ \hline -2x^2 + 6x - 3 \end{array}$$

2. $(4x^4 + 3x^2) + (3x^3 + 4) = 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4$, ya que:

$$\begin{array}{lllll} & 4x^4 & & +\,3x^2 & \\ + & & 3x^3 & & +\,4 \\ \hline & 4x^4 & +\,3x^3 & +\,3x^2 & +\,4 \end{array}$$

3. $(6x^3 - 2x) - (2x^2 - 4x + 8) = 6x^3 - 2x^2 + 2x - 8$, ya que:

$$\begin{array}{llll} 6x^3 & & -\,2x & \\ & -\,2x^2 & +\,4x & -\,8 \\ \hline 6x^3 & -\,2x^2 & +\,2x & -\,8 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios

Cuando multiplicamos polinomios, multiplicaremos todos los términos de un polinomio por todos los términos del otro polinomio. Después sumaremos todos los monomios resultantes. Si es necesario, vamos a simplificar términos. Esto es por un uso repetido de la regla de la distribución.

Ejemplos:

1. $x(x^3 + 5) = x \cdot x^3 + x \cdot 5 = x^4 + 5x$
2. $(x^2 + 1)(2x^3 + 5x - 3) = x^2 \cdot 2x^3 + x^2 \cdot 5x + x^2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2x^3 + 1 \cdot 5x + 1 \cdot (-3) = 2x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 2x^3 + 5x - 3 = 2x^5 + 7x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

División de polinomios

En la división de polinomios tenemos dos casos, ya que podemos dividir un polinomio entre un monomio o bien un polinomio entre otro polinomio.

Polinomio entre monomio

Debemos recordar que un monomio sólo tiene una literal; en otras palabras, es un polinomio de la forma $a_k x^k$. Cuando dividimos un polinomio entre un monomio debemos hacer la división de cada monomio del polinomio entre el monomio divisor y sumar los resultados.

Ejemplos:

1. $\dfrac{x^2 + x}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{x}{x} = x + 1$

2. $\dfrac{4x^5 - 8x^3 + x}{2x^2} = \dfrac{4x^5}{2x^2} - \dfrac{8x^3}{2x^2} + \dfrac{5}{2x^2} = 2x^3 - 4x + \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{x^2}$

Polinomio entre polinomio

Para describir la división de dos polinomios, es más conveniente revisar el proceso mediante un ejemplo. Supongamos que queremos dividir al polinomio $4x^3 - 18x^2 - 11x + 5$ entre el polinomio $x - 5$. En otras palabras, queremos realizar la división:

$$x - 5 \,\overline{\big)\, 4x^3 - 18x^2 - 11x + 5}$$

CURIOSIDADES

Origen del signo de multiplicación

El signo de multiplicar (×) es relativamente moderno. El matemático inglés William Oughtred, lo empleó por primera vez en el libro *Clavis Mathematicae*, publicado en 1631. Además, en ese mismo año, Harriot, también para indicar el producto a efectuar, colocaba un punto entre los factores. En 1637, Descartes ya se limitaba a escribir los factores acercados y de ese modo abreviado indicaba un producto cualquiera. En la obra de Leibniz se encuentra el signo ^ para indicar la multiplicación; este mismo signo, puesto de modo inverso, indicaba la división.

Barros, Patricio y Antonio Bravo, " Origen del signo de multiplicación (x)", en <http://www.librosmaravillosos.com/>, consulta: febrero de 2015.

Pasos del proceso	Ejemplo
1. Dividimos al monomio $4x^3$ del primer polinomio entre el monomio x del segundo polinomio.	$x-5\,\overline{)\,4x^3-18x^2-11x+5}$
2. El resultado de la división del paso anterior la ponemos en la división, como parte del cociente.	$4x^2$ $x-5\,\overline{)\,4x^3-18x^2-11x+5}$
3. Ahora multiplicamos al monomio que obtuvimos por el polinomio divisor $x-5$ y se lo restamos al polinomio que estamos dividiendo.	$4x^2$ $x-5\,\overline{)\,4x^3-18x^2-11x+5}$ $\underline{-4x^3-20x^2}$ $2x^2-11x^2+5$
4. Repetimos los pasos 1 a 3, pero ahora con el polinomio que sale en la resta del último paso.	$4x^2+2x$ $x-5\,\overline{)\,4x^3-18x^2-11x+5}$ $\underline{-4x^3-20x^2}$ $2x^2-11x^2+5$ $\underline{-(2x^2-10x)}$ $-x+5$
5. Este proceso lo seguimos hasta que obtenemos un cero cuando hacemos la resta o bien cuando ya no podemos hacer la división de monomios.	$4x^2+2x-1$ $x-5\,\overline{)\,4x^3-18x^2-11x+5}$ $\underline{-4x^3-20x^2}$ $2x^2-11x^2+5$ $\underline{-(2x^2-10x)}$ $-x+5$ $\underline{-(-x+5)}$ 0
6. Cuando terminamos el proceso, obtenemos el resultado.	$(4x^3-18x^2-11x+5)\div(x-5)=4x^2+2x-1$

NO ABANDONO

"El mejor resultado es producto de que cada uno en el grupo haga lo mejor para sí mismo y para el grupo".
John F. Nash, matemático estadounidense

Actividad de desarrollo

Curiosidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

ATRIBUTO

- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.

1. De manera individual, calcula en tu cuaderno los resultados de las siguientes operaciones con polinomios:

1. $(x^3+4x^2-1)+(4x^3-2x^2-4x+2)$
2. $(x^3+5x^2+x-4)-(-3x^2+5x-2)$
3. $(2x^4+x+2)(2x+4)$
4. $(3x^3+8x^2+7x+2)\div(3x+2)$

2. Comparte el proceso de tus operaciones con tus compañeros y contrasta los resultados. Si tienen diferencias, lleguen entre todos al resultado correcto.

CURIOSIDADES

Si elevamos al cuadrado un número formado sólo por unos, el resultado contendrá las cifras del uno hasta el que corresponda al total de unos que forman el número que estamos elevando al cuadrado y desde ahí de vuelta al uno. Esto da lugar a una estructura especular.

12 = 1 (un solo uno, elevado al cuadrado).

112 = 121 (dos unos formando el número 11 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega sólo hasta el dos).

1112 = 12 321 (tres unos formando el número 111 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega hasta el tres).

11112 = 1 234 321 (cuatro unos formando el número 1111 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega hasta el cuatro).

111112 = 123 454 321 (cinco unos formando el número 11111 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega hasta el cinco).

1111112 = 12 345 654 321 (seis unos formando el número 111111 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega hasta el seis).

11111112 = 1 234 567 654 321 (siete unos formando el número 1111111 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega hasta el siete).

111111112 = 123 456 787 654 321 (ocho unos formando el número 11111111 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega hasta el ocho).

1111111112 = 1 234 567 898 765 4321 (nueve unos formando el número 111111111 elevado al cuadrado, por lo que la secuencia llega hasta el nueve).

Utiliza las leyes de los exponentes y radicales (enteros y fraccionarios) en expresiones algebraicas

En las expresiones algebraicas podemos simplificar los monomios. Esto sucede cuando tenemos expresiones como $3x^2$ y x^3: es posible simplificar la literal x de forma que aparezca una sola vez en el monomio.

Exponentes y radicales enteros y su operatividad

Sabemos que a^n es igual a a multiplicado n veces. Al número $n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos exponente y al número $a \in \mathbb{R}\ \{\neq 0\}$ lo llamaremos base, por lo que diremos que a está elevado a la n. Sabiendo esto, podemos ver las siguientes reglas de los exponentes.

Reglas de los exponentes

1. $a^1 = a$
2. $a^0 = 1$
3. $a^n a^m = a^{n+m}$
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
6. $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$
7. $(a^n)^m = a^{nm}$
8. $a^n b^n = (ab)^n$
9. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Si $a^n = b$, entonces, decimos que $\sqrt[n]{b} = a$. En este caso, $b \in \mathbb{R}\ \{\neq 0\}$ es el radical y $n \in \mathbb{N}$ es el *exponente de raíz*. Por tanto, diremos que a b le estamos sacando la raíz *n-ésima*. Si el exponente de raíz es un número par, el radical b no puede ser negativo. Si el radical es cero, la raíz *n-ésima* será siempre cero, sin importar el exponente de raíz. Aquí tenemos las siguientes reglas de las raíces.

Reglas de las raíces

1. $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
2. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$
5. $\sqrt[n]{a}\;\sqrt[n]{b} = \sqrt{a \cdot b}$
6. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
7. $\sqrt[n]{a^{m}} = (\sqrt[m]{a})^{n}$

Actividad de desarrollo

Precisión

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

ATRIBUTO

- Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos

1. De forma individual, realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios para simplificar las expresiones dadas.

1. $7^{3} * 7^{-5}$
2. $\dfrac{7^{-8}}{7^{-4}}$
3. $8^{3}(-2)^{3}$
4. $\dfrac{7^{-4}}{21^{-4}}$
5. $\sqrt[3]{2}\;\sqrt[5]{4}$
6. $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[5]{3}}$
7. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{8}}$
8. $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{15}}$

2. Comparte el proceso de tus operaciones con tus compañeros y contrasta los resultados. Si tienen diferencias, lleguen entre todos al resultado correcto.

Exponentes y radicales racionales y su operatividad

Cuando los exponentes son números racionales también resultan útiles las reglas anteriores, a las cuales podemos agregar las siguientes, para n y $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}\,\{\neq 0\}$.

1. $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$
2. $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^{n}}$

CURIOSIDADES

Durante 358 años los matemáticos de todo el mundo intentaron resolver el teorema de Fermat, una nota inacabada que el francés Pierre de Fermat (1601-1665), precursor del cálculo diferencial del siglo XVII, en el margen del libro *Aritmética* anotó como un comentario que retó a los matemáticos durante tres siglos: "tengo una demostración maravillosa de esta proposición, que este margen es demasiado estrecho para contener". El 26 de octubre de 1994, el matemático británico Andrew J. Wiles (a sus 40 años), de la Universidad de Princeton, demostró el teorema de Fermat. Wiles, para poder resolver el teorema de Fermat, tuvo que demostrar primero la conjetura de Shimura-Taniyama.

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
ATRIBUTO	• Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

1. En grupo, repartan los problemas entre el número de compañeros que haya en el salón y pasen por turnos a resolver cada uno en el pizarrón, explicando verbalmente el procedimiento llevado a cabo.

1. $(9a - 7 - 48b) + (4a + 4 - 20b)$
2. $(2a^2 + 5b^2) + (12a^2 + 4b^2)$
3. $(15x - 436) + (8x + 21)$
4. $(9ab + 4) + (3ab + 4)$
5. $(8ab + 4b) + (5ab - 4b)$
6. $(7.3x + 4.2y) + (5.3x + 2.2y)$
7. $(3.5x + 4.5y) + (5.3x + 4.2y)$
8. $(15xy + 6z) + (5xy + 9z)$
9. $(15xy - 7z) + (xy + 15z)$
10. $(20x - 8 - 8y) + (13x - 4 - 9y)$
11. $(17xz - 12 + 15zu) + (12xz + 12 + 15zu)$
12. $(2.3x^2 - 5y^2) + (1.3x^2 + 2.3y^2)$
13. $(7ax + 4b - y) + (10ax - 56y)$
14. $[17ab - (9ab + 8)] + (16ab - 2)$
15. $15ab - [(6ab - c) + (4ab + c)]$
16. $a - b^2 - [a^2 - (2ab - b^2)] - [a^2 - (2ab - b^2)]$

2. Realicen las siguientes multiplicaciones:

1. $(x^2 + xy)(xy)$
2. $(a^2 - b^2 + 2ab)(ab)$
3. $(x^8 - 3x^2 + 1)(-3)$
4. $(a^3 - a + a^2)(a)$
5. $(m^4 + m^2n^2 + n^4)(-m^2n^2)$
6. $(x^8 - 2x^2 + 3x - 1)(-3x^3y^8)$
7. $(y^2 + 2)(5xy)$
8. $(x^2 + xy + y^2)(xy)$
9. $(am)(m^3 - m^2 + m - 2)$
10. $(3a^2 - 5ab + 2b^2)(4a - 5b)$
11. $(3m)(5m^4 - 7m^2n^2 + n^4)$
12. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$
13. $(a^2 + b^2 - 2ab)(a - b)$
14. $(a^2 + b^2 + 2ab)(a + b)$
15. $(x^8 - 3x^2 + 1)(x + 3)$
16. $(a^3 - a + a^2)(a - 1)$
17. $(m^4 + m^2n^2 + n^4)(m^2 - n^2)$
18. $(x^8 - 2x^2 + 3x - 1)(2x + 3x^3y^8)$
19. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$
20. $(am + a)(m^3 - m^2 + m - 2)$
21. $(3a^2 - 5ab + 2b^2)(4a - 5b)$
22. $(3m - n)(5m^4 - 7m^2n^2 + n^4)$
23. $(a^2 + a + 1)(a^2 - a - 1)$
24. $(x^3 + 2x^2 - x)(x^2 - 2x + 5)$
25. $(m^2 - 2mn - 8n^2)(m^3 - 3m^2n + 2mn^2)$
26. $(x^2 + 1 + x)(x^2 - x - 1)$
27. $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x^2 + x^4)$
28. $(m^3 - 4rn + m^2 - 1)(m^3 + 1)$
29. $(a^2 - a + 5)(a^3 - 5a + 2)$
30. $(x^2 - 2xy)(xy - x^2 + 3y^2)$
31. $(n^2 - 2n + 1)(n^2 - 1)$
32. $(a^3 - 3a^2b + 4ab^2)(a^2b - 2ab^2)$
33. $(2x + 3y)(8x^3 - 9y^3 + 6xy^2 - 12x2y)$
34. $(3x^3 - a^3 + 2ax^2)(2a^2 - x^2 - 3ax)$
35. $(y^2 + 2)(5 - x^6y)$

3. Comenten grupalmente en cuáles ejercicios les resultó más fácil llegar al resultado y por qué.

Recapitulación

Preevaluación

Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 2.1" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.

1. Escribe los datos que faltan para completar los enunciados

   1. En una expresión algebraica sumamos o restamos los términos ________________.
   2. Cuando sumamos o restamos dos polinomios se suman o restan los ________________ de los términos semejantes.
   3. Cuando multiplicamos polinomios multiplicaremos __________ los términos de un polinomio por ________ los términos del otro polinomio. Después ______________ todos estos productos.
   4. En una expresión de la forma a^n, el número a se llama ________________ y el número n se llama ________________.
   5. En una expresión de la forma $\sqrt[n]{b}$ = a decimos que b es el _______________ y n es el ____________.
   6. Al elevar una suma al cuadrado, debemos hacer la ____________ de los cuadrados de cada término y el _____________ de la multiplicación de los sumandos.
   7. Si tenemos una expresión donde todos los sumandos tienen un factor en común, podemos ___ ____.
   8. Cuando sumamos dos expresiones algebraicas racionales vamos a buscar que el ____________________ sea igual en ambas expresiones.
   9. Para encontrar el numerador de una división, debemos multiplicar el _________________ del dividendo por el _____________________ del divisor.
   10. Si en una expresión algebraica racional el denominador tiene un _____________, vamos a quitarlo del denominador.

Realiza tu evaluación parcial.

1. Reduce los términos semejantes de los polinomios.
   a) $6a^{x+1} + 8a^{x+1}$
   b) $\frac{5}{6}a^2b - \frac{1}{8}a^2b$
2. Resta los polinomios.
   a) A $x^2 + y^2 - 3xy$ restar $-y^2 + 3x^2 - 4xy$
   b) A $x^3 - x^2 + 6$ restar $5x^2 - 4x + 6$
3. Suma los polinomios $ab + bc + cd$; $-5ab - 3bc - 3cd$, y $5ab + 2bc + 2cd$
4. Divide $-7x^4 - 24x^3 + 30x^2 - x - 4$ entre $-7x + 4$
5. Multiplica $5y^{+} - 3y^3 + 4y^2 + 2y$ por y $4 - 3y^2$
6. Expresa con exponente fraccionario los siguientes radicales.
   a) $3\sqrt[6]{m^7}\ \sqrt[5]{n^8}$
   b) $3\sqrt{b^3}\ \sqrt[3]{b^n}$
   c) $\sqrt[m]{a}\ \sqrt[n]{b^3}\ \sqrt[r]{cx}$

Valor: 5 puntos

Actividad de evaluación 2.1.1

Responsabilidad

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

TIC

EVALUACIÓN

RÚBRICA

1. Resuelve en tu cuaderno la serie de ejercicios propuesta en tres partes, aplicando operaciones aritméticas básicas, así como exponentes y radicales con expresiones algebraicas.

Parte 1. Sumas y diferencias de expresiones algebraicas

1. Simplifica las expresiones siguientes. Para ello, recuerda:
   - Eliminar signos de agrupación, así como obtener el resultado esperado aplicado a expresiones algebraicas.
   - Realizar la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando valores arbitrarios a las variables para verificar la igualdad.

1. $3x + 5y - 9x^2y - 5y - 8x^2y + 2x$
2. $4c + 5d - c + d$
3. $4xy + 9x - 3y + xy - 2x$
4. $9p + 3q + r - 9pqr$
5. $4ws + 7wx - 3wx + 4$

Parte 2. Exponentes en expresiones algebraicas

1. Simplifica las siguientes expresiones, aplicando las leyes de exponentes de producto y cociente para expresiones algebraicas. Al final, no olvides realizar la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando los valores arbitrarios a las variables para verificar la igualdad.

1. $(2a^3b^2c^4)^3$
2. $(4x^3y^6z^2)^2$
3. $\dfrac{3x^4y^6z^2}{29x^4y^3z^6}$
4. $\dfrac{16a^5b^6}{8a^2b^4c^7}$
5. $\left(\dfrac{6a^6b^2c^3}{36a^3b^5c^2}\right)^2$

Parte 3. Radicales en expresiones algebraicas

1. Simplifica las siguientes expresiones, aplicando las leyes de radicales de producto y cociente para expresiones algebraicas. Al final, no olvides realizar la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando los valores arbitrarios a las variables para verificar la igualdad.

1. $\sqrt{16a^2b^6c^4}$
2. $\sqrt[3]{27x^6y^9z^3w^{12}}$
3. $\dfrac{\sqrt{4x^2y^5z^9}}{\sqrt{9x^4y^3z^1}}$
4. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{x^6y^5}}{\sqrt[2]{y^{\frac{7}{3}}}}$

2. Al finalizar, copia los ejercicios de las tres partes en un documento de Word, incluyendo la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando los valores arbitrarios a las variables para verificar la igualdad.

3. Revisa que la redacción de tu trabajo tenga orden, claridad, concisión y precisión, así como que la ortografía sea correcta.

4. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha y número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.

5. Antes de entregar a tu profesor el documento de Word, realiza tu "Autoevaluación 2.1.1" que se encuentra al final de esta unidad en la sección "Instrumentos de evaluación". Revisa si cumpliste con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de entregarlo.

6. Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo en Word impreso a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza.

15 horas

2.2 Representa y resuelve situaciones de su entorno mediante la aplicación y desarrollo de productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas

Los productos notables y las factorizaciones nos ayudarán para simplificar ciertas expresiones algebraicas. Con éstos podremos resolver problemas de forma más sencilla.

NO ABANDONO

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles".
René Descartes, filósofo y matemático francés

Actividad de inicio

Curiosidad intelectual

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

ATRIBUTO

- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

1. En pareja, resuelvan las siguientes expresiones.

1. $9x + 3xy$ y $3x(3 + y)$ con $x = 3$ y $y = 2$.
2. $2x^2 + 4x$ y $2x(x + 2)$ con $x = 2$.

2. Discutan por qué se obtienen los mismos resultado en ambos ejercicios.

Solución de productos notables

JUEGO 7 DIGITAL

Existen ciertos productos algebraicos que aparecen con mucha frecuencia, por lo que resultan muy importantes para resolver problemas matemáticos. También son muy útiles para simplificar ciertas expresiones.

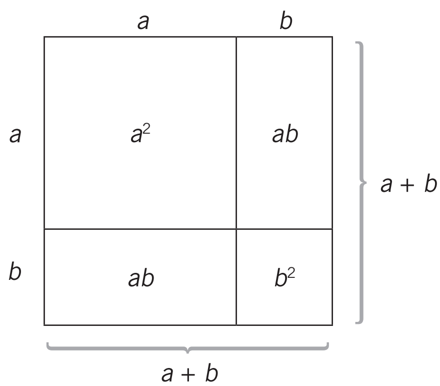
Binomio al cuadrado

Al elevar una suma al cuadrado, debemos hacer la suma de los cuadrados de cada término y el doble de la multiplicación de los sumandos.

Ejemplos:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(4x + 7y)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(7y) + (7y)^2 = 16x^2 + 56xy + 49y^2$

Esto lo podemos visualizar de manera gráfica con un cuadrado con lados de longitud $a + b$:



El área total del cuadrado es $(a + b)^2$. Sin embargo, podemos ver que el área se puede calcular como la suma de cuatro partes, cada una de área a^2, b^2 y dos veces ab, respectivamente.

Cuando elevamos al cuadrado una resta, hacemos la suma de los cuadrados de cada término y le restamos el doble de los dos términos.

Ejemplos:

1. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
2. $(2x - 9y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(9y) + (9y)^2 = 4x^2 - 36xy + 81y^2$

NO ABANDONO

"Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura".
Bertrand Russell, filósofo, matemático y escritor británico

Binomios conjugados

Cuando multiplicamos la suma de dos números con la resta de los mismos números, obtenemos como resultado la diferencia de sus cuadrados.

Ejemplos:

1. $(a + b)(a - b) = a^2 - b2$
2. $(4x + 3y)(4x - 3y) = (4x)^2 - (3y)^2$

Actividad de desarrollo

Pensamiento sistémico

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. • **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
ATRIBUTO	• Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

1. $(3y^2 + 2x)^2$
2. $(6x - 2y)^2$
3. $(4x^2 + y)(4x^2 - y)$

2. Comenta en grupo en qué situaciones de la vida real podrías utlizar operaciones con binomios conjugados, y para qué.

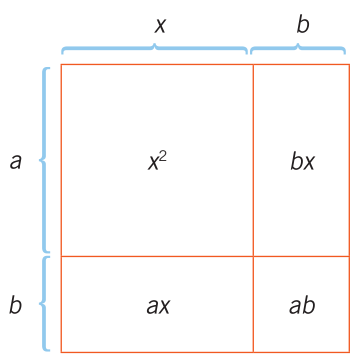
Binomios con término común

Cuando multiplicamos dos binomios que tienen un término en común, obtenemos la suma del cuadrado del término común, la multiplicación del término común con la suma de los términos no comunes, y la multiplicación de los términos no comunes.

Ejemplos:

1. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
2. $(x + 3y)(x + 2y) = x^2 + (3y + 2y)x + (3y)(2y) = x^2 + 5yx + 6y^2$

Esto lo podemos visualizar en forma gráfica como sigue:



Aquí vemos que el área del rectángulo se puede calcular haciendo la multiplicación $(x + a)(x + b)$. Aunque debe ser evidente que también podemos calcular el área de este rectángulo mediante la suma de las cuatro partes mostradas, de modo que $x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$.

TIC

"Ecuaciones con palabras"

Este tipo de pasatiempo apareció por primera vez en la revista *Games*, en mayo-junio de 1981. Will Shortz propuso en esa ocasión 24 "ecuaciones", y debido al éxito que tuvieron la revista siguió publicando este tipo de "ecuaciones" en números posteriores. El objetivo es reemplazar las letras por palabras de modo de que quede una frase "correcta". Practica estas recreaciones matemáticas, en el siguiente link:

http://mx.tiching.com/link/76347

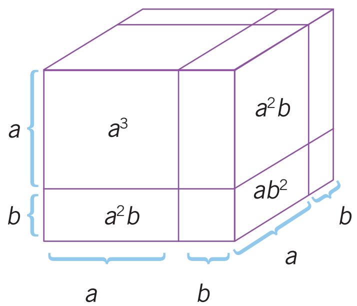
Binomio al cubo

Cuando elevamos un binomio al cubo, el resultado que obtenemos es la suma del cubo del primer término, el triple de la multiplicación del cuadrado del primer término con el segundo término, el triple de la multiplicación del primer término con el cuadrado del segundo término, y el segundo término al cubo.

Ejemplos:

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a2b + 3ab^2 + b^3$
2. $(3x + 2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 = 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

Al visualizar esto en forma gráfica, obtenemos lo siguiente:



Aquí podemos ver que tenemos dos formas para calcular el volumen de este cubo. Una de estas formas es a través de $(a + b)^3$. Sin embargo, debe ser evidente que también podemos utilizar la forma $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

En caso de que la operación consiste en la resta de dos números elevada al cubo, alternamos el signo de las sumas anteriores.

Ejemplos:

1. $(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$
2. $(2a – b)^3 = (2a)^3 – 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 – \mathrm{b}^3 = 8a^3 – 12a^2b + 6ab^2 – b^3$

NO ABANDONO

"La matemática es la reina de las ciencias, la aritmética la reina de la Matemática".
Carl Friedrich Gauss, matemático alemán

Actividad de desarrollo

Comunicación — VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, calcula en tu cuaderno los binomios.

1. $(x – 2)\ (x – 8)$ 2. $(x + 7)^3$ 3. $(2x – 4y)^3$

2. Verifica tus resultados con un compañero; luego, compártanlos con el resto del grupo.

CURIOSIDADES

La geometría tiene origen en el antiguo Egipto y Babilonia, ya que necesitaban realizar mediciones en la tierra para construir y desarrollar otras ciencias.

Factorización de expresiones algebraicas

Usaremos la factorización para simplificar los cálculos que hacemos en los problemas que nos encontraremos tanto en las matemáticas como en otras disciplinas. Hay muchos métodos de factorización que resultan útiles, muchos de los cuales resultan de la aplicación de algún producto notable.

Factor común

Si tenemos una expresión donde todos los sumandos tienen un factor en común, podemos quitar al factor común de la expresión y colocarlo de manera que multiplique a la expresión que queda.

Ejemplos:

1. $ab + ac = a(b + c)$
2. $3x^2y - 6x + 9xy = 3x(3xy - 2 + 3y)$

Diferencia de cuadrados

Cuando tenemos una diferencia de dos números elevados al cuadrado, podemos reescribir esta expresión como la multiplicación de la suma y la resta de los dos números

Ejemplos:

1. En $a^2 - b^2$ vemos que $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{b^2} = b$, entonces tenemos que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2. En $16x^2y^4 - 25x^2y^2$ vemos que $\sqrt{16x^2y^4} = 4xy^2$ y $\sqrt{25x^2y^2} = 5xy$, entonces tenemos que $16x^2y^4 - 25x^2y^2 = (4xy^2 + 5xy)(4xy^2 - 5xy)$

Trinomio cuadrado perfecto

Si tenemos un trinomio que consiste en la suma de dos números elevados al cuadrado junto con el doble de la multiplicación de dichos números, podemos factorizar esta expresión como el cuadrado de la suma de los dos números.

Ejemplos:

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ya que $2ab = 2\sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2}$
2. $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$ ya que $12xy = 2\sqrt{(2x)^2}\,\sqrt{(3y)^2}$

Si, por otra parte, a la suma de dos números elevados al cuadrado le restamos el doble de la multiplicación de los dos números, podremos factorizar esta expresión como el cuadrado de la resta de los dos números.

Ejemplos:

1. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
2. $16m^2 - 16mn^2 + 4n^4 = (4m - 2n^2)^2$, ya que $\sqrt{16m^2} = 4m$, $\sqrt{4n^2} = 2n^2$ y $16mn^2 = 2(4m)(2n^2)$

NO ABANDONO

"Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar".
Hipatia, filósofa y maestra neoplatónica griega

Actividad de desarrollo

Rigor

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. • **Disciplinar:** Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
ATRIBUTO	• Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

1. De manera individual, factoriza en tu cuaderno las siguientes expresiones:

1. $4x^2y^5 - 8x^3y^2$
2. $36a^6 - 9b^2$
3. $36x^2 - 96xy + 64y^2$

2. Compara tus resultados con los de otro compañero. Si tuvieran diferencias, revisen los procedimientos usados y las operaciones realizadas para, entre los dos, llegar a la respuesta correcta.

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

La expresión algebraica de esta sección es un trinomio con una sola variable, x. Esta variable aparece en dos términos: una vez elevada al cuadrado y la segunda vez sin exponente. Aparte de esto, hay un término independiente (sin variable). Además, tenemos que el coeficiente a es distinto de cero. Para factorizar este trinomio vamos a considerar dos casos. El primero es cuando a tiene el valor de 1 y el otro es cuando es distinto de 1.

Si $a = 1$, podemos escribir al trinomio como $x^2 + bx + c$. Así, el problema consiste en encontrar dos números, p y q, tales que $p + q = b$ y $pq = c$. Si es posible hallarlos, entonces se puede factorizar al trinomio como $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$.

Ejemplos:

1. $x^2 + 7^x - 8$. Aquí buscamos dos números, p y q, tales que $p + q = 7$ y $pq = -8$. Como la multiplicación de p y q es negativa, uno de los dos tiene que ser negativo y el otro positivo. Además, como la suma de p y q es positiva, el número más pequeño tiene que ser el número negativo. Las opciones que quedan para la multiplicación son:

- $p = -1$ y $q = 8$
- $p = -2$ y $q = 4$

Al revisarlas, vemos que $-1 + 8 = 7$ y $-2 + 4 = 2$. Por lo tanto, la primera opción es la correcta. En consecuencia, tenemos la factorización $x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$.

2. $x^2 - 7x + 12$. Aquí buscamos dos números, p y q, tales que $p + q = -7$ y $pq = 12$. Como la multiplicación es positiva, p y q tienen que ser ambos positivos o ambos negativos. Pero como las suma es negativa, p y q no pueden ser ambos positivos. De esta manera, para la multiplicación tenemos las siguientes opciones para los números p y q:

- $p = -1$ y $q = -12$
- $p = -2$ y $q = -6$
- $p = -3$ y $q = -4$

TIC

Para consutar más sobre el tema de monomios, binomios y polinomos, visita la siguiente página:

http://www.vitutor.com/ab/p/a_4.html

Al comprobarlas, vemos que $(-3) + (-4) = -7$. Entonces $p = -3$ y $q = -4$. Por lo tanto, tenemos que $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(3 - 4)$.

Consideremos ahora el caso de que el coeficiente a sea distinto de 1: el trinomio queda entonces en su forma general $ax^2 + bx + c$. Para ayudarnos, multiplicaremos al trinomio por a para obtener $a^2x^2 + abx + ac = (ax)^2 + b(ax) + ac$. Ahora, como en el caso anterior, buscaremos dos números, p y q, tales que $p + q = b$ y $pq = ac$ (nota la diferencia respecto del caso anterior en la multiplicación). Así, podemos factorizar al trinomio como $(ax)^2 + b(ax) + ac = (ax + p)(ax + q)$.

Debe resultar evidente que la multiplicación del trinomio por el coeficiente a modificó el trinomio original. Para regresar a lo que teníamos al inicio, dividimos todo entre a, para obtener:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax + p)(ax + q)}{a} = \frac{1}{a}(ax + p)(ax + q)$$

Ejemplo:

1. $9x^2 + 3x - 2$. Multiplicamos al trinomio por 9 para obtener $(9x)^2 + 3(9x) - 18$. Buscamos ahora dos números, p y q, tales que $p + q = 3$ y $pq = -18$. Como la multiplicación es negativa, uno de los dos números tiene que ser negativo y el otro positivo. Asimismo, como la suma es positiva el número negativo tiene que ser el menor. De esta manera, para la multiplicación tenemos las siguientes opciones:

- $p = -1$ y $q = 18$
- $p = -2$ y $q = 9$
- $p = -3$ y $q = 6$

Al verificarlas, podemos ver que $-3 + 6 = 3$; en consecuencia, tenemos que $p = -3$ y $q = 9$. Esto nos da la factorización $(9x)^2 + 3(9x) - 18 = (9x - 3)(9x + 6)$. Si ahora dividimos entre el 9 por el que multiplicamos al principio obtenemos $9x^2 + 3x - 2 = \frac{(9x - 3)(9x + 6)}{9}$

Binomio de la forma $a^3 \pm b^3$

Cuando tenemos la suma o la resta de dos números elevados al cubo, es posible comprobar que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ y que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos:

1. $8x^3 + 27 = (2x + 3)[(2x)^2 - (2x)(3) + 3] = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$
2. $a^6 - 8b^3 = (a^2 - 2b)[(a^2)^2 + (a^2)(2b) + (2b)^2] = (a^2 - 2b)(a^4 + 2a2b + 4b^2)$

NO ABANDONO

"Para crear una filosofía sana hay que renunciar a la metafísica, pero ser un buen matemático".
Bertrand Russell, filósofo, matemático y Nobel inglés

Actividad de desarrollo

Tolerancia
VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, factoriza en tu cuaderno las siguientes expresiones.

1. $x^2 - 5x - 50$
2. $9x^2 - 6x - 8$
3. $8x^3 + 125$

2. Compara tus resultados con los de otro compañero. Si tuvieran diferencias, revisen los procedimientos usados y las operaciones realizadas para llegar, entre los dos, a la respuesta correcta.

Aplicación de expresiones algebraicas racionales

Una expresión algebraica racional es una fracción que contiene, tanto en el numerador como en el denominador, una expresión algebraica.
Ejemplos:

1. $\dfrac{a+1}{a}$
2. $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x+2}}$

Operaciones con expresiones algebraicas racionales

Las expresiones algebraicas racionales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir de manera similar a como trabajamos con fracciones comunes.

Cuando sumamos dos expresiones algebraicas racionales, vamos a buscar que el denominador sea igual en ambas expresiones. Para esto multiplicaremos al numerador y al denominador de cada expresión algebraica racional por el denominador de la otra expresión algebraica racional. El resultado tendrá como numerador la suma de los nuevos numeradores y como denominador la expresión resultante de la multiplicación anterior (a lo que se le denomina denominador común).
Ejemplos:

1. $\dfrac{a+1}{a}+\dfrac{\sqrt{b}}{b}=\dfrac{(a+1)b}{ab}+\dfrac{a\sqrt{b}}{ab}=\dfrac{(a+1)b+a\sqrt{b}}{ab}$
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{3c}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{5}=\dfrac{5\sqrt{a}}{5(3c)}+\dfrac{3c\sqrt{a+1}}{5(3c)}=\dfrac{5\sqrt{a}+3c\sqrt{a+1}}{15c}$

En el caso de una resta, el procedimiento es prácticamente el mismo excepto que en el resultado final en lugar de sumar se resta.
Ejemplos:

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{b}-\dfrac{a+2}{c}=\dfrac{c\sqrt{a}}{cb}-\dfrac{b(a+2)}{bc}=\dfrac{c\sqrt{a}-b(a+2)}{bc}$
2. $\dfrac{\sqrt{a+2}}{4c^2}-\dfrac{\sqrt{a-1}}{3a}=\dfrac{3a\sqrt{a+2}}{(3a)4c^2}-\dfrac{4c^2\sqrt{a-1}}{3a(4c^2)}=\dfrac{3a\sqrt{a+2}-4c^2\sqrt{a-1}}{12ac^2}$

Cuando multiplicamos dos expresiones algebraicas racionales, multiplicamos los numeradores para el numerador del resultado y multiplicamos los denominadores para el denominador del resultado.
Ejemplos:

1. $\dfrac{a}{a+1}\cdot\dfrac{a-2}{a+1}=\dfrac{a(a-2)}{(a+1)^2}$
2. $\dfrac{\sqrt{b}}{4c^2}\cdot\dfrac{\sqrt{a+1}}{9}=\dfrac{\sqrt{b}\,\sqrt{a+1}}{36c^2}$

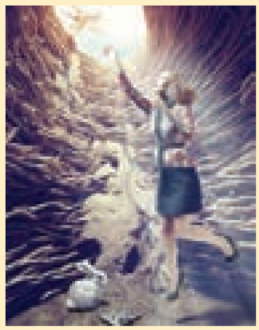
Por último, en el caso de la división de dos expresiones algebraicas racionales, para encontrar el numerador del resultado se multiplica el numerador del dividendo con el denominador del divisor. Por su parte, para encontrar el denominador del resultado debemos multiplicar el denominador del dividendo con el numerador del divisor.
Ejemplos:

1. $\dfrac{a}{a+4}\div\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}=\dfrac{a\sqrt{a}}{(a+4)(a+1)}$
2. $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b+1}}\div\dfrac{4a+7}{3c}=\dfrac{3c\sqrt{c}}{(4a+7)\sqrt{b+1}}$

CURIOSIDADES

El escritor de *Alicia en el país de las maravillas*, Lewis Carroll, era matemático, por eso esta obra no es sólo un cuento infantil. La condición de matemático de Carroll ejerce una influencia tremenda en la historia. *Alicia en el país de las maravillas* está lleno de guiños matemáticos, entre ellos, referencias al álgebra, a la teoría de números, a la lógica, al análisis, a las propiedades reflexiva y simétrica de una relación, a los máximos y mínimos de una función, a las propiedades de la circunferencia, rectas y segmentos, y a la lógica y el razonamiento deductivo. Pero hay muchos otros muchos detalles del libro que sugieren conceptos matemáticos; por ejemplo:

- En el capítulo 1, "Por la madriguera del conejo", ciertos comentarios de Alicia mientras sufre una caída *interminable* por la madriguera recuerdan al **concepto de límite.**



- En el capítulo 2, "El charco de lágrimas", Alicia dice: "Veamos, cuatro por cinco son doce, cuatro por seis son trece y cuatro por siete…¡Ay, Dios mío! ¡Así no llegaré nunca a veinte!".

Actividad de desarrollo

Comunicación

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, simplifica las siguientes expresiones algebraicas racionales.

1. $\frac{5ab}{b^2} + \frac{7a}{b}$ 2. $\frac{3a}{a} - \frac{5b}{3b}$ 3. $\frac{a+1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ 4. $\frac{(a+3)^2}{6b} \div \frac{b}{(a+3)^3}$

2. Verifica tus resultados con un compañero; luego, compártanlos con el resto del grupo.

Simplificación de expresiones algebraicas racionales

Es muy común encontrarse en situaciones en las que se necesita simplificar una expresión algebraica racional. Una de tales situaciones se presenta cuando el numerador y el denominador de la expresión algebraica racional tienen un mismo factor.

Ejemplos:

1. $\frac{a(a+1)}{ab} = \frac{a+1}{b}$. Aquí el factor común es a.

2. $\frac{a^2+2a}{ab+2b} = \frac{a\,(a+2)}{b\,(a+2)} = \frac{a}{b}$. Aquí el factor común es $a + 2$.

En el caso que el denominador tenga un radical, es necesario retirarlo de ahí. Para conseguirlo se requiere revisar tres casos distintos.

Caso 1: Expresión de la forma $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Aquí, multiplicamos tanto al numerador como al denominador por el radical $\sqrt{c}$. Así, obtenemos

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a}{b(\sqrt{c}\,)^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

Ejemplos:

1. $\frac{4}{3\sqrt{a+1}} = \frac{4\sqrt{a+1}}{3(\sqrt{a+1}\,)^2} = \frac{4\sqrt{a+1}}{3(\sqrt{a+1}\,)}$

2. $\frac{c+1}{9a\sqrt{a+2}} = \frac{(c+1)\,\sqrt{a+2}}{9a(\sqrt{a+2}\,)^2} = \frac{(c+1)\,\sqrt{a+2}}{9a(a+2)^2}$

Caso 2: Expresión de la forma $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se procede multiplicando al numerador y al denominador por el radical $\sqrt[n]{c^{n-m}}$. De esta manera, obtenemos $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\;\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{bc}$

Ejemplos:

1. $\frac{4}{6\sqrt[3]{c^2}} = \frac{4\sqrt[3]{c}}{6\sqrt[3]{c^2}\;\sqrt[3]{c}} = \frac{4\sqrt[3]{c}}{6\sqrt[3]{c^3}} = \frac{4\sqrt[3]{c}}{6}$

2. $\frac{\sqrt{a+1}}{7a(\sqrt[5]{5-a}\,)^3} = \frac{\sqrt{a+1}\;\sqrt[5]{5-a}\,)^2}{7a(\sqrt[5]{5-a}\,)^3\;\sqrt[5]{5-a}\,)^2} = \frac{\sqrt{a+1}\;\sqrt[5]{(5-a)^2}}{7a\;\sqrt[5]{(5-a)^5}} = \frac{\sqrt{a+1}\;\sqrt[5]{(5-a)^2}}{7a(5-a)}$

CURIOSIDADES

Números perfectos

La denominación de números perfectos es dada a un número entero cuando ese número es igual a la suma de sus propios divisores, excluyéndose, claro está, de entre esos divisores, el propio número. Así, por ejemplo, el 28 presenta cinco divisiones menores que 28. Son: 1, 2, 4, 7 y 14. Y 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 Luego, según la definición dada arriba, el 28 pertenece a la categoría de los números perfectos.

Y entre los números perfectos ya calculados podemos citar: 6, 28, 496 y 8128 sólo conocemos números perfectos pares. Descartes pensaba la posibilidad de determinar números perfectos impares.

Barros, Patricio y Antonio Bravo, "Números perfectos", en <http://www.librosmaravillosos.com/matematicadivertidaycuriosa/seccion02.html#_4._Origen_del>, consulta febrero de 2015.

Caso 3: Expresión de la forma $\dfrac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$

El procedimiento en este caso consiste en multiplicar tanto al numerador como al denominador por el denominador de la expresión cambiando el signo de la expresión.
Ejemplos:

1. $\dfrac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \dfrac{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \dfrac{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \dfrac{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

2. $\dfrac{3a}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \dfrac{3a(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \dfrac{3a(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{3a(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \dfrac{3a(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$

Los tres casos anteriores pueden combinarse, de resultar necesario.
Ejemplo:

1. Simplifica la expresión $\dfrac{c\,(a-b)}{\sqrt[4]{c^3}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$$\frac{c\,(a-b)}{\sqrt[4]{c^3}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{c\,(a-b)\,\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{c^3}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,\sqrt[4]{c}} = \frac{c\,(a-b)\,\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{c^4}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{c\,(a-b)\,\sqrt[4]{c}}{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{(a-b)\,\sqrt[4]{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} =$$

$$\frac{(a-b)\,\sqrt[4]{c}\,\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{(a-b)\,\sqrt[4]{c}\,\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \sqrt[4]{c}\,\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

Actividad de cierre

Comunicación

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

ATRIBUTO

- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo

1. En equipos de tres integrantes, simplifiquen las siguientes expresiones algebraicas racionales.

1. $\dfrac{a^2+ab}{a}$
2. $\dfrac{3xy^2+5a^2x^4}{-3x^2}$
3. $\dfrac{a^8-5ab}{-2a}$
4. $\dfrac{x^8-4x^2+x}{-2x}$
5. $\dfrac{4x^8-10x^6+5x^4}{2x^8}$
6. $\dfrac{6m^8-8m^2+32n+20mn^2}{-2m^2}$
7. $\dfrac{6a^8b^5-3a^6b^6\;a^2b^5}{3a^2b^3}$
8. $\dfrac{x^4-5x^5-10x^2+15x}{-5x}$
9. $\dfrac{5m^9n^2-10m^7n^2+20m^5n^9+22mn}{2m^2}$
10. $\dfrac{ax+a^{11}}{a^2}$
11. $\dfrac{2am-3am^2+2m+6am^4}{-3a^8m}$
12. $\dfrac{amb^{11}+am+7bn+2a+a^2bm}{ma^2b^8}$
13. $\dfrac{13xm+25xm+6xm+7xm}{x^8m^2}$
14. $\dfrac{4a+46m^{16}ax+8am^2+8ax+m^2x}{-2axm^2}$
15. $\dfrac{a^2-ab}{a-2}$
16. $\dfrac{3xy^8+5a^2x^4}{-3x^3+3}$
17. $\dfrac{a^8-5ab}{-2a-4}$
18. $\dfrac{x^8-4x^2+x}{-2x+2}$
19. $\dfrac{4x^8-8x^6+5x^4}{2x^8-6}$
20. $\dfrac{6m^8-8m^2+32n+20mn^2}{-2m^2-8}$

2. Compartan sus resultados con el resto del grupo. Para ello, pasen por turnos a exponer un problema en el pizarrón, expresando verbalmente el procedimiento que llevaron a cabo para obtener el resultado correcto.

Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 2.2" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.

1. Escribe los datos que faltan para completar los enunciados.

1. Al elevar una suma de términos al cuadrado, debemos hacer la ______________ de los cuadrados de cada término y el ______________ de los sumandos.
2. Cuando multiplicamos la suma de dos números con la resta de ellos mismos, obtenemos la ______________ de los números.
3. Cuando multiplicamos dos binomios que tienen un término en común, obtenemos la suma del cuadrado del término común, la ______________ del término común y la suma de los términos no comunes y la ______________ de los términos no comunes.
4. Cuando elevamos al cubo a un binomio, obtenemos la ______________ del cubo del primer término, el ______________ de la multiplicación del cuadrado del primer término y el segundo término, el ______________ de la multiplicación del primer término y el cuadrado del segundo término y el segundo término al ______________.
5. Si tenemos una expresión donde todos los sumandos tienen un factor en común, podemos ______________ al factor común de la expresión y ______________ a la expresión que queda.
6. Cuando tenemos una diferencia de dos números elevados al cuadrado, podemos expresarlo como la ______________ de la ______________ de los dos números y la ______________ de los dos números.
7. Si tenemos un trinomio que es la suma de dos números elevados al cuadrado y el doble de la multiplicación de los números, podemos factorizar esta expresión como el ______________ de la suma de los dos números.
8. Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ vamos a considerar dos casos. El primero es cuando a es ______________ y el otro caso es cuando a es ______________.
9. Una expresión algebraica racional es una ______________ de dos expresiones algebraicas.

Realiza tu evaluación parcial.

1. Resuelve los siguientes productos notables.
   1. $(x + 2)^2$
   2. $(x + 2)(x + 3)$

2. Realiza una factorización de las siguientes expresiones para obtener dos factores:
   1. $a^2 + ab$
   2. $b + b^2$

3. Por medio de una factorización, reescribe las siguientes expresiones en dos factores.
   1. $x^2 - y^2$
   2. $a^2 - 1$

4. Factoriza los siguientes trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
   1. $2x^2 + 3x - 2$
   2. $3x^2 + 5x - 2$

5. Realiza la factorización de las siguientes expresiones.
   1. $1 + a^3$
   2. $1 - a^3$

6. Realiza las sumas, divisiones y multiplicaciones que correspondan en las siguientes expresiones con polinomios.
   1. $\frac{1}{3} + \frac{x + 1}{x^3 + x^2} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)^2}$
   2. $\frac{x^2 - x - 6}{x^3 + x} \div \frac{-x - 2}{x^4 - 1}$

Valor: 5 puntos

Actividad de evaluación 2.2.1

Rigor

VALORES

TIC

EVALUACIÓN

RÚBRICA

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
ATRIBUTO	• Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno la serie de ejercicios propuesta en cuatro partes, aplicando productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas.

Parte 1. Productos notables

1. Simplifica las expresiones algebraicas de la serie de ejercicios propuesta.

- Aplica las reglas del binomio al cuadrado, al cubo, producto conjugado o con término común, según corresponda.
- Sigue el procedimiento que has aprendido en los temas anteriores y obtén el resultado esperado.
- Realiza la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando las valores arbitrarios a las variables y verificando la igualdad.

1. $(x - 1)^2$
2. $(n + 3)(m + 3)$
3. $(n - 3)(m + 3)$
4. $(1 + b)^3$
5. $(a^2 + 4)(a^2 - 4)$
6. $(x + 1)(x - 1)$

Parte 2. Factorización

1. Simplifica los ejercicios de cada una de las series propuestas.

- Aplica los distintos métodos de factorización aprendidos en la unidad para obtener el resultado esperado.
- Describe a qué método se corresponde la solución de cada ejercicio.
- Realiza la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando las valores arbitrarios a las variables y verificando la igualdad.

1. $x^2 + x$
2. $3a^3 - a^2$
3. $x^3 - 4x^4$
4. $5m^2 + 15m^3$
5. $ab - bc$
6. $x^2y + x^2z$
7. $2a^2x + 6ax^2$
8. $8m^2 - 12mn$
9. $x^3 + y^3$
10. $m^3 - n^3$
11. $y^3 + 1$
12. $y^3 - 1$
13. $8x^3 - 1$
14. $6x^2 + 7x + 2$
15. $12x^2 - x - 6$
16. $3 + 11a + 10a^2$
17. $1 - y^2$
18. $4a^2 - 9$
19. $25 - 36x^4$

Parte 3. Fracciones algebraicas

1. Simplifica las tres expresiones propuestas, aplicando las reglas de factorización en las fracciones algebraicas para obtener el resultado esperado.

- Describe los aspectos relevantes de la solución de cada ejercicio.
- Realiza la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando los valores arbitrarios a las variables y verificando la igualdad.

1. $\dfrac{4x}{2\sqrt{6}} + \dfrac{7x}{15}$
2. $\dfrac{4x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$
3. $\dfrac{4x^2}{\sqrt{2x^3} - \sqrt{3x^2}}$

Parte 4. Autoevaluación

1. Analiza críticamente los siguientes aspectos de tu desempeño:

- Los factores que influyeron en tu toma de decisiones.
- Si construiste hipótesis, así como si diseñaste y aplicaste modelos para probar su validez.
- ¿Seguiste las instrucciones y procedimientos indicados de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo?
- ¿Ordenaste información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones?

2. Al finalizar, copia los ejercicios de las tres partes en un documento de Word.
3. En cada ejercicio explica textualmente los procedimientos y métodos aplicados, junto con los resultados que obtuviste paso por paso.
4. Incluye en el documento el análisis crítico sobre tu desempeño que realizaste en la cuarta parte de tu evaluación.
5. Revisa que la redacción del documento tenga orden, claridad, concisión y precisión, así como que la ortografía sea correcta.
6. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha, número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.
7. Antes de entregar al profesor el documento de Word con tu serie de ejercicios, realiza tu “Autoevaluación 2.2.1” que se encuentra al final de esta unidad, en la sección “Instrumentos de evaluación”. Revisa si tu trabajo cumple con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de entregarlo.
8. Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo en Word impreso a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza.

Lee con atención los siguientes ejercicios, realiza las operaciones y rellena completamente el círculo que corresponda a la respuesta correcta.

1. Realiza la suma de los siguientes polinomios $(9 + 5x^3 - 4x^2 + x)$, $(4x^2 - 3 - 2x)$.
   - a) $5x^3 + 8x^2 + 3x + 2$
   - b) $5x^3 - x + 6$
   - c) $5x^3 + 8x^2 + x + 6$
   - d) $5x^3 + 8x^2 - 3x + 12$

2. Halla el trinomio cuadrado perfecto que corresponde al polinomio $3x - 2$ elevado al cuadrado.
   - a) $9x^2 + 2x + 4$
   - b) $9x^2 + 12x + 2$
   - c) $9x^2 + 12x + 4$
   - d) $9x^2 - 12x + 4$

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la factorización del polinomio $-15x^3 + 3x + 30x^2 + 6$?
   - a) $(3x + 6)(-5x^2 + 1)$
   - b) $(-3x + 6)(-5x^2 + 1)$
   - c) $(3x - 6)(-5x^2 + 1)$
   - d) $(3x + 6)(-x^2 + 1)$

4. Selecciona la factorización correspondiente al siguiente trinomio: $3x^2 + 21x - 24$.
   - a) $(x + 8)(3x + 6)$
   - b) $(x + 8)(3x + 3)$
   - c) $3(x - 1)(x + 8)$
   - d) $3(x - 3)^2$

5. Simplifica la expresión $\frac{4x^3y^5}{2x^2y^7}$.
   - a) $\frac{2x}{y^2}$
   - b) $\frac{2x^2}{y^2}$
   - c) $\frac{2x}{y}$
   - d) $\frac{4x^2}{y^2}$

6. Factoriza la expresión $125x^3 - 27y^6$.
   - a) $(5x - 3y^2)(25x^2 + 15xy^2 + 9y^4)$
   - b) $(3x - 5y^2)(5x^2 + 15xy^2 + 3y^4)$
   - c) $(5x - 3y^2)(25x^2 - 8xy^2 + 9y^4)$
   - d) $(5x + 3y^2)(25x^2 - 15xy^2 - 9y^4)$

7. Simplifica la expresión $\frac{\sqrt{x^7}}{\sqrt[4]{x^6}}$.
   - a) $\sqrt{x^3}$
   - b) x^2
   - c) $\sqrt{x}$
   - d) x^{13}

8. Simplifica la expresión $\frac{4a}{5\sqrt{a^3}}$.
   - a) $\frac{4\sqrt{a^3}}{a}$
   - b) $\frac{4\sqrt{a^2}}{5a^2}$
   - c) $\frac{4\sqrt{a^3}}{5a^2}$
   - d) $\frac{4\sqrt[4]{a^3}}{5a^2}$

9. Simplifica la expresión $\frac{6}{3\sqrt[4]{x^3}}$.
   - a) $\frac{4\sqrt[2]{x^3}}{x}$
   - b) $\frac{2\sqrt[5]{x^2}}{3x^2}$
   - c) $\frac{2\sqrt[5]{x^2}}{3x}$
   - d) $\frac{2\sqrt[5]{x^2}}{x}$

10. Simplifica la expresión $\frac{8a}{\sqrt{4a} + \sqrt{2a}}$.
    - a) $4(\sqrt{4a} - \sqrt{2a})$
    - b) $8(\sqrt{4a} - \sqrt{2a})$
    - c) $4(\sqrt{4a} + \sqrt{2a})$
    - d) $4(\sqrt{2a})$

Autoevaluación

Evalúa los indicadores de aprendizaje de cada actividad de evaluación parcial para conocer la calificación que estás en posibilidad de obtener en la rúbrica según tu desempeño. Marca una ✔ en cada indicador logrado.

Para obtener **Suficiente**, deberás cubrir todos los indicadores del tono más claro, y para lograr **Excelente**, todos los indicadores de ambos tonos.

Suficiente **Excelente**

Rúbrica 2.1.1		
Módulo: Manejo de espacios y cantidades.	**Grupo:**	
Nombre del alumno:	**Fecha:**	
Resultado de aprendizaje (RA): **2.1.** Resuelve problemas de la vida cotidiana, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.	**Actividad de evaluación:** **2.1.1** Resuelve la serie de ejercicios propuesta, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.	
Porcentaje	✔	**Indicador logrado**
Sumas y diferencias de expresiones algebraicas 30%		Simplifiqué 5 ejercicios de la serie propuesta, de términos semejantes para sumas y diferencia.
		Eliminé signos de agrupación, obteniendo el resultado esperado, aplicado a expresiones algebraicas.
		Seguí la metodología expuesta por el docente.
		Realicé la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando valores arbitrarios a las variables y comprobando la igualdad.
Exponentes en expresiones algebraicas. 35%		Simplifiqué 5 ejercicios de la serie propuesta, de términos semejantes para sumas y diferencia.
		Apliqué leyes de exponentes de producto y cociente en expresiones algebraicas.
		Seguí la metodología expuesta, obteniendo el resultado esperado.
		Realicé la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando valores arbitrarios a las variables y comprobando la igualdad.
Radicales en expresiones algebraicas 35%		Simplifiqué 5 ejercicios de la serie propuesta.
		Apliqué leyes de exponentes de producto y cociente en expresiones algebraicas.
		Seguí la metodología expuesta, obteniendo el resultado esperado.
		Simplifiqué individualmente, 5 ejercicios de la serie propuesta.
		Apliqué leyes de radicales de producto y cociente a expresiones algebraicas.
		Seguí la metodología expuesta obteniendo el resultado esperado.
		Realicé la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando las valores arbitrarios a las variables y comprobando la igualdad.
	100%	

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de "Suficiente", o si deseas mejorar para lograr el "Excelente", repasa los conceptos vistos en el RA 2.1 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Marca una ✔ en cada indicador logrado.

Rúbrica 2.2.1		
Módulo: Manejo de espacios y cantidades.	**Grupo:**	
Nombre del alumno:	**Fecha:**	
Resultado de aprendizaje (RA): **2.2** Representa y resuelve situaciones de su entorno, mediante la aplicación y desarrollo de pro-ductos notables, factorización y racionalización de ex-presiones algebraicas.	**Actividad de evaluación:** **2.2.1** Resuelve la serie de ejercicios propuesta por el docente, relativos a situaciones cotidianas y del entorno personal, familiar y social del alumno, aplicando productos notables, factorización y racionalización de expresiones algebraicas.	
Porcentaje	✔	**Indicador logrado**
Productos notables **35%**		Simplifiqué expresiones algebraicas sobre ejercicios de la serie propuesta.
		Apliqué las reglas del binomio al cuadrado, al cubo, producto conjugado, con término común.
		Seguí el procedimiento descrito, obteniendo el resultado esperado.
		Realicé la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando las valores arbitrarios a las variables y comprobando la igualdad.
Factorización **30%**		Simplifiqué ejercicios de cada una de las series propuestas.
		Apliqué los distintos métodos de factorización obteniendo el resultado esperado.
		Señalé a qué método se remite la solución de cada ejercicio.
		Realicé la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios dando las valores arbitrarios a las variables y comprobando la igualdad.
Autoevaluación **5%**		Analicé críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
		Construí hipótesis y diseñé y apliqué modelos para probar su validez.
		Seguí instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendien-do cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
		Ordené información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.
	100%	

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el RA 2.2 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Heteroevaluación

De acuerdo con el desempeño de sus alumnos, anote el peso logrado en cada actividad realizada. Sume los porcentajes para obtener el peso para la unidad.

Tabla de ponderación

Unidad	RA	Actividad de evaluación	Aspectos a evaluar			% Peso específico	% Peso logrado	% Peso acumulado
			C	P	A			
2. Manejo de operaciones con expresiones algebraicas.	**2.1.** Resuelve problemas de la vida cotidiana, aplicando operaciones aritméticas básicas, exponentes y radicales con expresiones algebraicas.	**2.1.1**	▲	▲	▲	15		
	2.2 Plantea problemas cotidianos, a partir de la traducción de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.	**2.2.1**	▲	▲	▲	15		
% peso para la unidad 2						**30**		
Peso total del módulo						**100**		

Al término de la última unidad, sume el peso logrado en todas las unidades y obtenga el total del módulo.

Coevaluación

Trabaja con un compañero para que se evalúen mutuamente. Escribe los datos en de tu compañero en la tabla siguiente.

Evalúa las competencias genéricas de tu compañero, conforme los indicadores e la tabla colocando una "X" en la casilla correspondiente.

Nombre de mi compañero:				
Carrera:		Nombre del módulo:		
Semestre:		Grupo:		
Competencias genéricas	**Atributos**	**Con frecuencia**	**Algunas ocasiones**	**Nunca**
Piensa crítica y reflexivamente				
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.			
	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.			
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos			
Aprende de forma autónoma				
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.			
	Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.			
Trabaja en forma colaborativa				
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.			
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.			

Cultura para la Paz

En esta sección, pondrás en práctica diversas estrategias para desarrollar algunas de las habilidades y actitudes éticas sobre valores de: comprensión, orden, justicia, reconocimiento del otro, cooperación, disciplina, equidad, límites democráticos y comunicación, y en particular, sobre la prevención de conflictos, con el fin de que aprendas a crear tu propio camino hacia la sana convivencia.

Equidad de género

"Yo no deseo que las mujeres tengan poder sobre los hombres, sino sobre ellas mismas".
Mary Wollstonecraf, filósofa y escritora inglesa

¿Qué es el género?

El género es una **construcción social** que impone roles, actitudes, intereses y formas de ser basados en el sexo de cada persona. Un ejemplo de ello es dar por sentado que una mujer es, "por naturaleza", sumisa, maternal y débil mientras que un hombre es fuerte, insensible y proveedor.

Debido a estos estereotipos y roles preestablecidos se ha relegado a las mujeres a una función meramente **reproductiva** y se les ha negado la oportunidad de acceder a otro tipo de espacios que no sean el doméstico.

Con respecto a lo anterior, las mujeres han sido un grupo social discriminado y menospreciado. Lo femenino, y por asociación las mujeres y sus actividades carecen de prestigio, de poder y de derechos. Como resultado, las mujeres han sido y siguen siendo las que menos cuentan con recursos económicos, las que menor acceso tienen a la educación en todos sus niveles y las que padecen graves efectos de violencia social por el sólo hecho de su condición femenina.

En las sociedades occidentales, hasta hace muy poco, las mujeres carecían de derechos civiles, no podían ejercer profesiones liberales, recibir una educación similar a la de los hombres, disponer de sus propios bienes o de autoridad sobre sus hijos.

Conceptos importantes

Androcentrismo: consiste en tomar al hombre de la especie como parámetro de lo humano, lo cual invisibiliza lo femenino e impide la existencia autónoma de personas del sexo femenino, ya que se adopta el punto de vista masculino como una posición central en la propia visión **del mundo.**

Machismo: manera de pensar a partir del cual se exaltan valores considerados masculinos como la virilidad, el poder físico, la hombría, que son expresados con violencia y fuerza. Lo anterior se traduce en pensar que los hombres son superiores "por naturaleza" y, por lo tanto, tienen el derecho y la capacidad de dominar a las mujeres.

Misoginia: actitud de odio y menosprecio hacia las mujeres.

Sexismo: es la discriminación basada en el sexo o género; ideas arraigadas culturalmente que consideran al sexo masculino naturalmente superior, y que están basadas en una serie de privilegios que mantienen al sexo femenino al servicio del masculino.

1. En esta actividad, conocerás un poco acerca de uno de los movimientos de equidad de género más importantes de la historia: el **Movimiento sufragista** de en Estados Unidos. A partir de la película, reflexionarás acerca de la discriminación hacia las mujeres, sus derechos y estrategias para lograr la equidad en tu círculo social.

Material:

Papel, pluma, caja de zapatos y la película *Las sufragistas* (*Suffragette*), de la directora Sarah Gavron, 2015 (duración: 1 h 46 min). Pueden rentar la película en un videoclub, o bien, verla en internet en Zate.tv (sólo tienen que registrarse), o en español en el siguiente linK:
https://openload.co/embed/1DlvC321FKw/

Desarrollo

2. En equipos de cuatro integrantes, vean la película *Las sufragistas*.
3. Coloquen, dentro de la caja de zapatos, hojas de papel con las siguientes preguntas:
   - ¿En qué condiciones vivían y trabajaban las mujeres de la película?
   - ¿Cuál era el objetivo de su lucha?
   - ¿Crees que era justo el trato que se les daba en la fábrica y por qué?
   - ¿Qué estrategias emplearon para pelear por sus derechos?
   - ¿Alguna vez has recibido algún trato injusto por el sólo hecho de ser mujer u hombre? ¿Cómo reaccionaste en ese momento?
   - ¿A qué se dedican las mujeres de tu familia?
   - ¿Crees que las tareas domésticas están repartidas de manera equitativa entre los miembros de tu familia?

1. Cada miembro del equipo tendrá un turno para sacar una hoja de papel y responder a lo que se pregunta, los demás aportarán sus opiniones respecto a su respuesta.

2. Para finalizar la actividad, respondan entre todos a la siguiente pregunta: ¿Qué acciones pueden llevar a cabo para fomentar la equidad de género en su círculo social? Presenten su respuesta ante el grupo.

Escena de la película *Las sufragistas (Suffragette)*, de la directora Sarah Gavron, 2015.

¿Cómo visualizas problemas en las matemáticas?

¿Qué problemas matemáticos puedes resolver con gráficas?

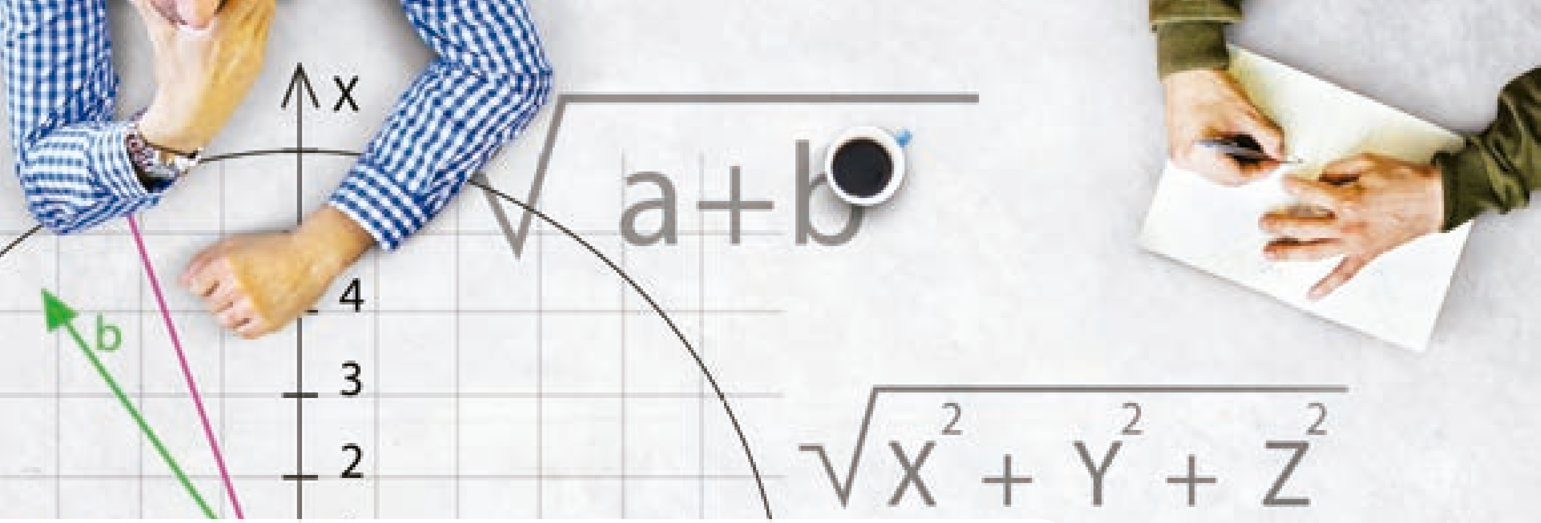
Unidad 3

MANEJO DE ECUACIONES DE PRIMER, SEGUNDO GRADO Y FUNCIONES ALGEBRAICAS

30 horas

"El que domina las matemáticas, piensa, razona, analiza y, por ende, actúa con lógica en la vida cotidiana; por lo tanto, domina el mundo".

Arturo Santana Pineda,
ingeniero mexicano



Competencias genéricas

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Competencias disciplinares de matemáticas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático
   y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

El hombre que calculaba

Capítulo III

Hacía pocas horas que viajábamos sin interrupción, cuando nos ocurrió una aventura digna de ser referida, en la cual mi compañero Beremís puso en práctica, con gran talento, sus habilidades de **eximio algebrista**. Encontramos, cerca de una antigua posada medio abandonada, tres hombres que discutían acaloradamente al lado de un lote de camellos. Furiosos se gritaban improperios y deseaban plagas:

–¡No puede ser!
–¡Esto es un robo!
–¡No acepto!

El inteligente Beremís trató de informarse de qué se trataba.

–Somos hermanos –dijo el más viejo– y recibimos, como herencia, esos 35 camellos. Según la expresa voluntad de nuestro padre, debo yo recibir la mitad, mi hermano Hamed Namir una tercera parte, y Harim, el más joven, una novena parte. No sabemos, sin embargo, cómo dividir de esa manera 35 camellos, y a cada división que uno propone protestan los otros dos, pues la mitad de 35 es 17 y medio. ¿Cómo hallar la tercera parte y la novena parte de 35, si tampoco son exactas las divisiones?

–Es muy simple –respondió el "Hombre que calculaba"–. Me encargaré de hacer con justicia esa división si me permiten que junte a los 35 camellos de la herencia, este hermoso animal que hasta aquí nos trajo en buena hora.

Traté en ese momento de intervenir en la conversación: –¡No puedo consentir semejante locura! ¿Cómo podríamos dar término a nuestro viaje si nos quedáramos sin nuestro camello?

Glosario

Eximio: muy ilustre, excelso.

Algebrista: persona que estudia, profesa o sabe el álgebra

–No te preocupes del resultado “Bagdalí” –replicó en voz baja Beremís–. Sé muy bien lo que estoy haciendo. Dame tu camello y verás, al fin, a que conclusión quiero llegar.

Fue tal la fe y la seguridad con que me habló, que no dudé más y le entregué mi hermoso camello, que inmediatamente juntó con los 35 camellos que allí estaban para ser repartidos entre los tres herederos.

–Voy, amigos míos –dijo dirigiéndose a los tres hermanos– a hacer una división exacta de los camellos, que ahora son 36.

Y volviéndose al más viejo de los hermanos, así le habló:

–Debías recibir, amigo mío, la mitad de 35, o sea 17 y medio. Recibirás en cambio la mitad de 36, o sea, 18. Nada tienes que reclamar, pues es bien claro que sales ganando con esta división.

Dirigiéndose al segundo heredero continuó: –Tú, Hamed Namir, debías recibir un tercio de 35, o sea, 11 camellos y pico. Vas a recibir un tercio de 36, o sea 12. No podrás protestar, porque también es evidente que ganas en el cambio.

Y dijo, por fin, al más joven: –A ti, joven Harim Namir, que según voluntad de tu padre debías recibir una novena parte de 35, o sea, 3 camellos y parte de otro, te daré una novena parte de 36, es decir, 4, y tu ganancia será también evidente, por lo cual sólo te resta agradecerme el resultado.

Luego continuó diciendo: –Por esta ventajosa división que ha favorecido a todos vosotros, tocarán 18 camellos al primero, 12 al segundo y 4 al tercero, lo que da un resultado (18 + 12 + 4) de 34 camellos. De los 36 camellos sobran, por lo tanto, dos. Uno pertenece, como saben, a mi amigo el “Bagdalí” y el otro me toca a mí, por derecho, y por haber resuelto a satisfacción de todos, el difícil problema de la herencia.

–¡Sois inteligente, extranjero! –exclamó el más viejo de los tres hermanos–. Aceptamos vuestro reparto en la seguridad de que fue hecho con justicia y equidad.

El astuto Beremís –el “Hombre que calculaba”– tomó luego posesión de uno de los más hermosos camellos del grupo y me dijo, entregándome por la rienda el animal que me pertenecía: –Podrás ahora, amigo, continuar tu viaje en tu manso y seguro camello. Tengo ahora yo, uno solamente para mí. Y continuamos nuestra jornada hacia Bagdad.

Malba Tahan, *El hombre que calculaba*, Noriega, México, 1992, p. 21.

Evaluación de comprensión lectora

Con base en el texto anterior, lee las siguientes preguntas y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es el nombre del “Hombre que calculaba”?

   a) Beremís.

   b) Harim.

   c) Hamed.

   d) Malba.

2. ¿Qué problema tienen los tres hermanos?

   a) Tienen una herencia de 35 camellos y no saben cómo repartirlos.

   b) Se perdieron y no saben cómo llegar a Bagdad.

   c) No tienen dinero para comer.

   d) Perdieron a su cuarto hermano.

3. ¿Cuántos camellos le tocaron a cada uno de los hermanos?

   a) 20, 10 y 5

   b) 18, 12 y 4

   c) 17, 11 y 3

   d) 13, 12 y 11

4. ¿A dónde se dirigen Beremís y su acompañante?

   a) Persia.

   b) Turquía.

   c) Bagdad.

   d) No se sabe.

5. Después de ayudar a los tres hermanos, ¿con cuantos camellos se quedaron los dos viajeros?

   a) 5

   b) 3

   c) 2

   d) 1

Lee con atención cada pregunta y rellena completamente el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuáles de lo siguientes términos son semejantes al término $4x^2y$?
   - a) $-3xy$
   - b) $2xy^2$
   - c) $15x^2y$
   - d) $-5x$

2. Si $x = 3$ y $y = -2$, la expresión $xy^2 + x - 8$ es igual a:
   - a) 7
   - b) 3
   - c) 1
   - d) –7

3. La expresión $3x + 3 + 4x - 5$ se simplifica como:
   - a) $5x$
   - b) $9x + 2$
   - c) $7x - 2$
   - d) $4x - 1$

4. La suma de los polinomios $2x^3 + 2x - 1$ y $-3x^4 + x$ es igual a:
   - a) $-3x^4 + 2x^3 + 3x - 1$
   - b) $-x^3 + 3x - 1$
   - c) $3x^4 + x^3 + x - 1$
   - d) $2x^4 + 4x^3 - 3x + 1$

5. Factoriza al trinomio $x^2 - x - 6$.
   - a) $(x - 1)(x + 1)$
   - b) $(x - 2)^2$
   - c) $(x - 3)(x + 2)$
   - d) $(x + 4)(x - 5)$

6. Factoriza la expresión $3x^2y^3 - 6x^4y^2$.
   - a) $6xy(x^2 - y^2)$
   - b) $3x^2y^2(y - x^2)$
   - c) $3x^2y^2(y^2 + x^2)$
   - d) $3x^2y(y - x^3)$

7. Simplifica la expresión $\frac{16a^4b^5c^7}{4a^2b^6c^2}$.
   - a) $\frac{4a^2c^5}{b}$
   - b) $\frac{b}{4a^2c^5}$
   - c) $\frac{16a^2c^5}{b}$
   - d) $\frac{4b^5c^7}{abc}$

8. Suma las expresiones algebraicas racionales $\frac{x}{x^2 - 1}$ y $\frac{3x}{x - 1}$.
   - a) $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 1}$
   - b) $\frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 1}$
   - c) $\frac{4x^2}{x^2 - 1}$
   - d) $\frac{3x^2 + 3x}{x - 1}$

9. Calcula el binomio $(2x - 3y)^2$.
   - a) $4x^2 - 9y^2$
   - b) $4x^2 - 6xy + 9y^2$
   - c) $4x^2 + 9y^2$
   - d) $4x^2 + 6xy - 9y^2$

10. Calcula el binomio conjugado $(5x - 3y)(5x + 3y)$.
   - a) $25x^2 - 9y^2$
   - b) $25x^2 + 9y^2$
   - c) $25x^2 - 15xy + 9y^2$
   - d) $25x^2 + 15xy - 9y^2$

15 horas

3.1 Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con una, dos o tres incógnitas

En la actualidad las matemáticas son una herramienta muy útil no sólo para las ciencias exactas, sino también para las ciencias sociales, como la economía, mercadotecnia o la psicología. Las matemáticas se encuentran en todas partes y todos las utilizamos de una u otra manera diariamente. Una forma de resolver problemas de la vida cotidiana es con el uso de ecuaciones. De éstas hay diversos tipos y nos ayudarán a resolver distintos problemas.

Actividad de inicio

Colaboración

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. • **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
ATRIBUTO	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

1. En pareja, realicen los siguientes ejercicios en su cuaderno y contesten las preguntas.
   1. Busquen los números que sumados den 10.
   2. Busquen los números que restados den 4.
   - ¿En qué pareja de números coinciden?
   3. Busquen los números que sumados den 25 y restados den 1.
   - ¿Pueden encontrar estrategias para resolver estos tipos de problemas?
2. Compartan sus resultados y respuestas con el grupo.

Identifica propiedades y postulados de la igualdad

Algo importante en el trabajo con las matemáticas es el uso de la **igualdad**. Ésta representa la equivalencia entre estas dos expresiones, y nos permite comparar expresiones.

Una igualdad algebraica es la expresión que posee números y letras, las cuales se denominan incógnitas o variables. Estas igualdades están constituidas por dos expresiones algebraicas separadas por un signo de igual (=).

Ejemplos:

1. $a + 1 = 5$
2. $4x = 12 + y$

Por lo tanto, si la igualdad es verdadera para cualquier valor de las letras, entonces, es una **identidad**.

Ecuación: es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica, o es verdadera, para determinados valores de las incógnitas. Las incógnitas se representan normalmente por las últimas letras del alfabeto: *x, y, z, u, v.*

Así, $5x + 2 = 17$ es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, y esta igualdad sólo se verifica, o sea que sólo es verdadera para el valor $x = 3$. En efecto, si sustituimos la x por 3, tenemos: $5(3) + 2 = 17$, o sea: $17 = 17$.

La igualdad $y^2 - 5y = -6$ es una ecuación porque es una igualdad que sólo se verifica para $y = 2$ e $y = 3$. En efecto, sustituyendo la y por 2.

Tenemos: → $2^2 - 5*2 = -6$

$$4 - 10 = -6$$
$$-6 = -6$$

Si hacemos $y = 3$, tenemos: $32 - 5 \cdot 3 = -6$

$$9 - 15 = -6$$
$$-6 = -6$$

Si damos a y un valor distinto de 2 o 3, la igualdad no se verifica.

Identidad: es una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las letras que entran en ella. Así:

1. $(c - d)^2 = (c - d)(c - d)$
2. $c^2 - m^2 = (c + m)(c - m)$

Son identidades porque se verifican para cualesquier valor de las letras c y d en el primer ejemplo, y de las letras c y m del segundo ejemplo.

El signo de identidad es ≡, que se lee "idéntico a".

Así, la identidad de $(x + y)^2$ con $x^2 + 2xy + y^2$

Se escribe: $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

Y se lee: $(x + y)^2$, idéntico a: $x^2 + 2xy + y^2$

Propiedades de la igualdad

En caso de igualar dos expresiones algebraicas, hablamos de ecuaciones. Las usamos para encontrar números que cumplen cierta expresión.

Ejemplos:

Usado los ejemplos anteriores:

1. Buscamos un número que sumado con 1 es igual a 5.
2. Buscamos dos números que son iguales si multiplicamos a uno por 4 y al otro le sumamos 12.

La igualdad es una relación que se define entre números. Las tres propiedades más importantes de la igualdad se resumen en una estructura matemática que se conoce como relación de equivalencia.

Las **relaciones de equivalencia** son relaciones entre los elementos de un conjunto cualquiera y su característica principal es que **abstraen** el concepto de *igualdad*.

La importancia de estas relaciones consiste en que dividen a los elementos del conjunto en diferentes clases, llamadas *clases de equivalencia*, de tal suerte que cada elemento pertenece a una y sólo una clase.

La relación de equivalencia se define con las siguientes propiedades.

Glosario

Igualdad: es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas que tienen el mismo valor.

Abstraer: separar por medio de una operación intelectual un rasgo o una cualidad de algo para analizarlos aisladamente o considerarlos en su pura esencia o noción.

AUDIO 8 DIGITAL

NO ABANDONO

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida".
John von Neumann, matemático, físico e inventor estadounidense

Propiedad reflexiva

Las propiedades de la igualdad nos ayudan a justificar los métodos que usaremos para resolver problemas. Por ejemplo, la propiedad reflexiva en palabras dice: un número siempre es igual a sí mismo.

Propiedad reflexiva: $a = a$

Ejemplo: $10 = 10$

Propiedad de simetría

En palabras dice: si un número es igual a otro, el segundo debe ser igual al primero.

Propiedad simétrica: Si $a = b$, entonces, $b = a$

Ejemplo: Si $x = 10$, entonces, $10 = x$

Propiedad transitiva

En palabras dice: si un primer número es igual a otro segundo número, y además, el segundo número es igual a otro tercer número, entonces el tercer número y el primer número deben ser iguales. Sin embargo, esas propiedades no son todas las que posee la igualdad.

Propiedad transitiva: Si $a = b$, y $b = c$, entonces, $a = c$

Ejemplo: Si $x = 10$, y $10 = w$, entonces, $x = w$.

Además de las propiedades en la relación de equivalencia, la igualdad presenta las siguientes propiedades.

Propiedad de sustitución

Dice: Si $a = b$, entonces siempre que una expresión contenga una a, podemos sustituirla por una b.

Propiedad de sustitución: Si $a = b \Rightarrow a$ puede sustituir a b.

Ejemplo: Si $x = 4 \Rightarrow 2(x) + 3 = 2(4) + 3$.

Propiedad aditiva

En palabras dice: que si tenemos dos igualdades, el sumar un lado de una igualdad con el mismo lado de la otra igualdad, será igual a sumar el otro lado de la primera igualdad con el mismo lado de la segunda igualdad.

Propiedad aditivita: si $a = b$ y $c = d$, entonces, $a + c = b + d$.

Ejemplo: Si $x = 6$ y $y = 4 \Rightarrow x + y = 4 + 6$.

Un caso especial que obtenemos de la propiedad aditiva dice: que al sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos una nueva igualdad válida.

Para la suma: Si $a = b$, entonces, $a + c = b + c$.

Ejemplo: Si $x = y$, entonces, $x + 6 = y + 6$.

La propiedad aditiva también es válida cuando tenemos la resta, recordemos que $a - b = a + (-b)$. Así tenemos la siguiente propiedad:

Si $a = b$ y $c = d$, entonces, $a - c = b - d$.

Ejemplo: Si $x = 7$ y $y = 2$, entonces, $x - y = 7 - 2$.

Propiedad multiplicativa

En palabras nos dice: que si tenemos dos igualdades, el multiplicar un lado de una igualdad con el mismo lado de la otra igualdad, será igual a multiplicar el otro lado de la primera igualdad con el mismo lado de la segunda igualdad.

Propiedad multiplicativa: si $a = b$ y $c = d$, entonces, $ac = bd$.

Ejemplo: Si $x = 3$ y $y = 2$, entonces, $xy = (2)(3)$.

Un caso especial que obtenemos de la propiedad multiplicativa dice: que si multiplicamos ambos lados de la igualdad por un número real, obtenemos otra nueva igualdad válida.

Ejemplo: Si $x = 5$, entonces, $7x = (7)\ (5)$.

La propiedad multiplicativa también es válida cuando tenemos la división, recordemos que $ab = a(\frac{1}{b})$. Así tenemos la siguiente propiedad:

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Ejemplo: Si $x = 4$ y $y = 2$, entonces $\frac{x}{y} = \frac{4}{2}$

Propiedad de la igualdad para la potencia

Indica que si elevamos a la misma potencia ambos lados de una igualdad, ésta se sigue cumpliendo.

Propiedad potencia: Si $a = b$, entonces, $a^n = b^n$

Ejemplo: Si $x = 5$, entonces, $x^2 = 5^2$

Propiedad de la igualdad para la raíz

Nos dice que si calculamos la raíz *n-ésima* en ambos lados de una igualdad (si esta operación es posible de realizar), la igualdad sigue siendo válida.

Propiedad raíz: Si $a = b$, entonces, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$

Ejemplo: Si $x = 5$, entonces, $\sqrt{x} = \sqrt{5}$

NO ABANDONO

"Llegar a una correcta comprensión de los fundamentos de la ciencia es el objetivo final que hay que tener siempre presente; pero para hacer cualquier progreso en ciencia es imprescindible estudiar problemas concretos".

Antonio J. Durán,
matemático español

Postulados de campo

JUEGO 8 DIGITAL

En las ecuaciones que resolverás usarás números reales. Decimos que los números reales forman un **campo** junto con la suma y la multiplicación. Todo conjunto cuyos elementos cumplan con los siguientes **postulados** para las operaciones de la suma y la multiplicación se llama **campo**, los números reales cumplen con los postulados, y por ello, se le refiere el campo de los números reales.

Postulado 1. Cerradura

Para la suma: este postulado o propiedad dice que si pensamos en dos números reales y los sumamos, el resultado vuelve a ser un número real.

Es decir: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + b) \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

$5, 7 \in \mathbb{R} \Rightarrow (5 + 7) \in \mathbb{R} \Rightarrow 12 \in \mathbb{R}$.

Aunque parezca obvio, esta propiedad tiene su chiste, pues resulta que no en todo conjunto de números se satisface esta propiedad.

Por ejemplo, si tenemos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y tomamos dos elementos de este conjunto, por ejemplo, el 5 y el 4 y los sumamos $5 + 4$, el resultado es 9 y este elemento no está en el conjunto A.

Así, decimos que el conjunto A no cumple con el *postulado de la cerradura* para la suma, y por lo tanto, el conjunto A no es campo.

Para la multiplicación: **análogamente**, este postulado o propiedad dice que si pensamos en dos números reales y los multiplicamos, el resultado vuelve a ser un número real.

Es decir: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \cdot b) \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, si consideramos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y tomamos dos elementos de este conjunto, por ejemplo, el 3 y el 5, y los multiplicamos (3) (5), el resultado es 15, y este elemento no está en el conjunto A. Así, decimos que el conjunto A no cumple con el postulado de la cerradura para la multiplicación y volvemos a ver que el conjunto A no es campo.

Glosario

Postulado: proposición cuya verdad se admite sin pruebas para servir de base en ulteriores razonamientos.

Análogamente: con analogía (relación de semejanza entre cosas distintas).

Postulado 2. Conmutativo

Nos hacemos la pregunta ¿es $5 + 8 = 8 + 5$ una afirmación verdadera?, todos sabemos que si es verdadera, pues $5 + 8 = 13$ y $8 + 5 = 13$.

Esto siempre es así, pues cuando queremos sumar dos números da lo mismo si pensamos por ejemplo en el 5 y luego le sumamos el 8, o si pensamos en el 8 y luego le sumamos el 5. Esto siempre pasa no importando cuáles sean los números.

Lo anterior se puede resumir: Si a y b son números reales, entonces, $a + b = b + a$. La anterior afirmación se conoce como el postulado o la **propiedad conmutativa para la suma o de la adición**.

Existe también la **propiedad conmutativa para la multiplicación** o **del producto**: Si a y b son números reales, entonces, $a \cdot b = b \cdot a$.

Esta afirmación dice que si queremos multiplicar por ejemplo 9×8, da lo mismo hacer $9 \times 8 = 72$ o $8 \times 9 = 72$.

Esta propiedad la usamos comúnmente y sin darnos cuenta de que la estamos usando.

Por ejemplo, si tenemos que multiplicar 8 x 7 y no nos acordamos de la tabla del 8 pero sí de la del 7, entonces, pensamos y decimos $7 \times 8 = 56$ y hacemos esto para facilitarnos la operación.

Finalmente se concluye que "el orden de los factores no afecta al producto".

Postulado 3. Asociativo

Veamos otra propiedad de la adición. Supongamos que queremos sumar $4 + 2 + 7$.
Podemos seguir dos caminos:

a) $(4 + 2) + 7$
b) $4 + (2 + 7)$

El resultado no depende del modo en que se elija sumar.

Pues si hacemos la operación en a) implica que $(4 + 2) + 7 = 6 + 7 = 13$ y, la opción b) implica $4 + (2 + 7) = 4 + 9 = 13$, lo cual lleva al mismo resultado.

Esto siempre lo podemos hacer para cualesquiera números reales, es decir, Si a, b y c son números reales, entonces, $(a + b) + c = a + (b + c)$. A esta propiedad se le llama **postulado o propiedad asociativa para la suma o de la adición.**

En otras palabras, se dice que si queremos sumar tres números, la suma la podemos hacer empezando con la suma de los dos primeros $(a + b)$ y a lo que salga le sumamos el tercero c, pero también podemos hacerla sumando los dos últimos $(b + c)$, y a lo que salga le sumamos el primero a, después de todo el resultado es el mismo.

Esta propiedad también la usamos cotidianamente, por ejemplo, cuando vamos de compras y tenemos en el carrito: naranjas, guayabas y manzanas y si cuestan por kilo, \$18, \$7 y \$10, respectivamente, entonces la suma la podemos hacer así:

$18 + 7 = 25$ y $25 + 10 = 35$, pero también la podemos hacer así:

$7 + 10 = 17$ y $17 + 18 = 35$, o también así:

$18 + 10 = 28$ y $28 + 7 = 35$; es decir, que nosotros decidimos qué números sumamos primero, esto es, asociamos, y por eso, la propiedad se llama **asociativa**.

También existe la misma propiedad para el producto que dice así:

Si a, b y c son números reales entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. A esta propiedad se le llama **propiedad asociativa para la multiplicación o del producto.**

NO ABANDONO

"Sólo hay un rincón en el Universo
que sabes que puedes mejorar,
y ése eres tú".
Aldous Huxley,
novelista y ensayista inglés

Postulado 4. Distributivo

Las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y la multiplicación son de fundamental importancia, a pesar su aparente sencillez. Hasta aquí, hemos usado estas propiedades en expresiones que incluyen sólo una operación. Veamos ahora, algunas expresiones en que ambas operaciones, suma y multiplicación, se combinan para formar otra propiedad.

Ejemplo:

La expresión $5(3 + 4) = 5 \cdot 7 = 35$, la realizamos sumando primero $(3 + 4)$ y luego multiplicando el resultado de esta suma por 5. Tomemos otra ruta para realizar esta operación:

Multipliquemos (5×3) y luego (5×4). Ahora sumemos ambos productos, el resultado es el mismo que en la primera operación. Con este criterio es cierto que: $5 \cdot (3 + 4) = (5 \cdot 3) + (5 \cdot 4)$.

Ejemplo:

La expresión $3 \cdot (8+2) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 2$ la suma $(8+2)$ está multiplicada por el factor 3. En esta afirmación, $3 \cdot (8+2) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 2$, podemos notar que el factor 3 multiplica a cada término de la suma.

Esto es, el 3 está "**distribuido**" en la suma.

En la operación $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$, el multiplicador es 2 y está distribuido en la suma (3 + 5). Por lo tanto, estamos en presencia del postulado o propiedad distributiva que en resumen dice:

Si a, b y c son números reales, entonces, $a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Esta propiedad la usaremos con frecuencia en la resolución de ecuaciones.

Postulado 5. Identidad

Los números reales cero y uno, a pesar de su aparente ingenuidad, se comportan de un modo muy peculiar en las operaciones de suma y multiplicación.

Este comportamiento se destaca en matemáticas como propiedades de los números reales 0 y 1. El uno puede estar presente y no notarse; por ejemplo, una variable x, contiene números uno que no se ven, ya que no se acostumbra ponerlos. Podemos verla como $x = 1x$.

Esta forma de escribir el número uno en álgebra permite suponer que si el coeficiente no se escribe, se supondrá que éste es uno. Lo mismo sucederá cuando no se escriba el exponente ni el divisor.

El cero es cosa aparte. Basta decir que el cero tardó en aparecer cerca de 3 000 años en la estructura matemática. Sin el cero, la matemática actual es inimaginable.

El número cero tiene dos propiedades muy especiales:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R};\, x + 0 = x$, que significa que si sumamos cero a cualquier número real, la suma es igual a este número.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R};\, x \cdot 0 = 0$, que significa que al multiplicar cualquier número real por cero el producto siempre es cero.

A la propiedad a) que tiene el cero se le llama identidad para la suma o también propiedad del neutro aditivo.

El número uno es la identidad para la multiplicación o también se dice que tiene la propiedad del neutro multiplicativo y dice:

$\forall\, x \in \mathbb{R};\, x \cdot 1 = x$, que significa que cualquier número real multiplicado por uno da el mismo número. Estas propiedades también son muy importantes para comprender el estudio futuro.

Postulado 6. Inversos

El inverso para la suma es el número que sumado con otro dado nos da 0.

Ejemplo: qué número sumado a 4 nos da cero, es el –4 pues $4 + (-4) = 0$.

Esta propiedad que no sólo la tiene el 4 o el –4, se llama **propiedad del inverso para la suma o inverso aditivo**, y en general dice:

Si x es un número real, entonces, existe un número $-x$ que sumado con x nos da cero, es decir, $x + (-x) = 0$, y se dice que el inverso aditivo de x es $-x$.

De hecho uno es inverso aditivo del otro. Así, el inverso aditivo del 8 es el –8 (o el inverso aditivo del –8 es el 8) y el inverso aditivo del –34 es el 34 (o el inverso aditivo del 34 es el –34).

El inverso para la multiplicación. Es el número real que multiplicado con otro dado nos da 1.

Ejemplo 1: ¿Cuál es el inverso multiplicativo de 4?, se tiene que es $\frac{1}{4}$, ya que $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Ejemplo 2: ¿Qué número multiplicado por 8 nos da 1?, es el $\frac{1}{8}$, ya que $\frac{1}{8} \cdot 8 = 1$.

En resumen, decimos que el inverso multiplicativo de un número x es $\frac{1}{x}$, pues $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Claro está que si el número x, es por ejemplo el 53, entonces, el inverso multiplicativo es el $\frac{1}{53}$, pues $53 \cdot \frac{1}{53} = 1$.

Para encontrar el inverso multiplicativo de un número, soóo basta cambiar de lugar el numerador y el denominador.

Actividad de desarrollo

Comunicación

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, realiza en tu cuaderno lo que se pide en cada ejercicio y responde las preguntas.

1. Determina si las siguientes expresiones son iguales.

   a. $3x + 2x$ y $x + 4x$
   b. $6x - 3x$ y $2x + 2x$
   c. $7xy + 2xy$ y $3xy + 6xy$
   d. xy^3 y $3xy^3 - xy^3$
   e. $2y + 4y$ y $10y - 4y$

2. Escribe las siguientes igualdades.

   a. El doble de un número sumado con 4 es igual al triple del número.
   b. Cuatro veces un número menos 5 es igual al triple del número más 3.
   c. La suma del triple de un número y el doble del número es igual a 7 veces el número menos 4.

3. ¿Qué propiedad representan las siguientes afirmaciones?

   a. $2 + 4 = 4 + 2$
   b. $3\,(5 + 3) = 3\,(5) + 3(3)$
   c. $4 + (5 - 9) = (4 + 5) - 9$
   d. $3 \cdot 6 = 6 \cdot 3$
   e. $-2(3 + 7) = (-2)\,(3) + (-2)(3)$

4. ¿Por qué el número cero no es una identidad para la multiplicación?
5. ¿Por qué el número cero es una identidad para la suma?
6. ¿Por qué el número uno no es una identidad para la suma?
7. ¿Por qué el número uno es una identidad para la multiplicación?
8. ¿Cuál es la identidad para la suma?
9. ¿Cuál es la identidad para la multiplicación?
10. ¿Cuál es el inverso para la suma de -8?
11. ¿Cuál es el inverso para la suma de 31?
12. ¿Cuál es el inverso para la multiplicación de -8?
13. ¿Cuál es el inverso para la multiplicación de 31?

2. Verifica tus resultados con un compañero; luego, compártanlos con el resto del grupo.

CURIOSIDADES

Ptolomeo Soter, rey de Egipto, fundador de una dinastía notable, resolvió crear en Alejandría un centro de estudios, capaz de rivalizar con las escuelas griegas más notables como las de Platón y Pitágoras. Mandó a llamar a Euclides y le invitó a ocupar una de las posiciones más elevadas en la nueva escuela.

La distribución de las materias que debían ser estudiadas en la academia, en la parte referente a la aritmética y geometría, fueron expuestas con claridad, precisión y también con simplicidad.

Una vez terminada la tarea, Euclides llevó al rey su trabajo. Se auxiliaba de un esclavo que llevaba las numerosas hojas cuidadosamente enrolladas. El monarca, rodeado de sus generales y cortesanos, recibió al geómetra en una audiencia solemne. Sorprendido talvez, por el gran desarrollo que tenía su trabajo, el rey preguntó a Euclides, si no había otro camino más sencillo, menos espinoso, que le permitiera llegar al conocimiento de la geometría.

Respondió el geómetra: – ¡No, príncipe, en matemática no existe ningún camino especialmente diseñado para los reyes!

Euclides, de Justo de Gante, siglo XV Palacio Barberini de Roma.

Solución de ecuaciones de primer grado

Podemos modificar las ecuaciones sumando, restando, multiplicando y dividiendo ambos lados de la ecuación con el fin encontrar el valor que x debe tomar para cumplir la ecuación.

Con una variable

Un tipo de ecuaciones que nos podemos encontrar son de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales, y x es una incógnita. Aquí procedemos de la siguiente forma:

1. Le restamos b a los dos lados de la ecuación ($ax + b - b = c - b$) y obtenemos $ax = c - b$.
2. Dividimos entre a a los dos lados de la ecuación ($\frac{ax}{a} = \frac{c-b}{a}$) y obtenemos $x = \frac{c-b}{a}$

Ejemplos:

1. Para resolver la ecuación $4x + 2 = 14$, hacemos lo siguiente:
   a) Restamos 2 de los dos lados de la ecuación para obtener $4x + 2 - 2 = 14 - 2$, y así obtenemos la ecuación $4x = 12$.
   b) Dividimos entre 4 esta ecuación para obtener $\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$ y así obtenemos que $x = 3$.
2. Para resolver la ecuación $3y - 5 = 10$, hacemos lo siguiente:
   a) Sumamos con 5 ambos lados de la ecuación para obtener $3y - 5 + 5 = 10 + 5$, y así obtenemos la ecuación $3y = 15$.
   b) Dividimos entre 3 esta ecuación para obtener $\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$, y así obtenemos que $x = 5$.

Simultáneas con dos variables

Otro tipo de ecuaciones que nos podemos encontrar es cuando tenemos dos variables y dos ecuaciones. Esto quiere decir que tenemos dos ecuaciones de la forma:

$a_1x + a_2y = a_3$
$b_1x + b_2y = b_3$

Tenemos tres maneras para resolver este tipo de ecuaciones: suma y resta, sustitución e igualación.

Suma y resta

Elegimos una de las dos variables que queremos eliminar y multiplicamos las dos ecuaciones de tal forma que si sumamos o restamos las ecuaciones (por la propiedad aditiva de la igualdad), esta variable no aparece en el resultado. Resolvemos la ecuación de una variable que resulta para obtener el valor de esa variable. Esa variable que encontramos la sustituimos en alguna de las dos ecuaciones iniciales para obtener una ecuación de una variable, que podemos resolver y obtener el valor de la segunda variable.

Ejemplo:

Tenemos las ecuaciones $2x + 4y = 16$ y $3x + 3y = 15$.

Elegimos a la variable x, entonces, vamos a multiplicar a la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación la vamos a multiplicar por 2.

Así obtenemos las ecuaciones $6x + 12y = 48$ y $6x + 6y = 30$.

Restamos la segunda ecuación de la primera y obtenemos $6x - 6x + 12y - 6y = 48 - 30$, y así llegamos a la ecuación $6y = 18$.

Esta ecuación la dividimos entre 6 y obtenemos que $y = 3$.

Sustituimos al valor de y en la primera ecuación y obtenemos la ecuación de una variable $2x + 4(3) = 16$ y la resolvemos obteniendo $x = 2$.

Sustitución

Elegimos una de las variables y la despejamos de una de las ecuaciones dejando la variable sola en uno de los lados de la ecuación. Sustituimos esto en la otra ecuación (por la propiedad de sustitución de la igualdad), y obtenemos una ecuacion de una variable. Resolvemos esta ecuación para obtener el valor de la variable. Sustituimos el valor de esa variable en alguna de las ecuaciones iniciales y resolvemos la ecuación resultante para obtener el valor de la segunda variable.

Ejemplo:

Tenemos las ecuaciones $x + 4y = 15$ y $3x - 5y = -6$.

Elegimos a la variable x y la despejamos de la primera ecuación obteniendo $x = 15 - 4y$.

Sustituimos esto en la segunda ecuación obteniendo $3(15 - 4y) - 5y = -6$.

Con esto obtenemos la ecuación $45 - 12y - 5y = -6$, que podemos simplificar a $45 - 17y = -6$.

Resolvemos esta ecuación obteniendo $y = 3$. Sustituimos el valor de y en la primera ecuación y obtenemos la ecuación $x + 4(3) = 15$.

Simplificando esta ecuación obtenemos $x + 12 =1 5$. Si resolvemos esta ecuación obtenemos $x = 3$.

CURIOSIDADES

Decimos que los números 220 y 284 son números amigos, ya que si sumamos los divisores de 220 (1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110) suman 284 y los divisores de 284 (1, 2, 4, 71 y 142) suman 220.

Igualación

Elegimos una de las variables y la despejamos en las dos ecuaciones. Por la propiedad podemos igualar las dos expresiones que son iguales a la variable elegida (usando la propiedad de transitividad de la igualdad). Resolvemos la ecuación resultante, que será de una variable. Sustituimos al valor de la variable, que obtenemos en alguna de las dos ecuaciones iniciales, y resolvemos la ecuación resultante para obtener el valor de la segunda variable.

Ejemplo:

Tenemos las ecuaciones $2x + y = 6$ y $-3x + y = 1$. Despejamos en ambas ecuaciones a y para obtener las ecuaciones $y = 6 - 2x$ y $y = 1 + 3x$. Igualamos estas dos ecuaciones para obtener la ecuación de una variable $6 - 2x = 1 + 3x$. Resolvemos esta ecuación para obtener $x = 1$. Sustituimos al valor de x en la primera ecuación para obtener la ecuación de una variable $2(1) + y = 6$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $y = 4$.

El tercer tipo de ecuaciones lineales que nos podemos encontrar son de la forma:

$$a_1x + a_2y + a_3z = a_4$$
$$b_1x + b_2y + b_3z = b_4$$
$$c_1x + c_2y + c_3z = c_4$$

Aquí tenemos tres ecuaciones simultáneas con tres variables.

TIC

Diviérte mirando en la película *Good Will Hunting* (traducida en México como *Mente indomable*), del director Gus Van Sant (1997), la historia de un joven rebelde de 20 años con una inteligencia asombrosa, especialmente para las matemáticas, quien resuelve de manera rápida de la teoría de grafos algebraicos, pero desconoce el significado de su talento hasta que los consejos de un solitario y bohemio profesor le ayudarán a decidir si continúa con sus estudios.

https://www.youtube.com/watch?v=Nq41NMMRqBk

Simultáneas con tres variantes

Para resolver este tipo de ecuaciones lineales, tomamos dos de las ecuaciones y con alguno de los tres métodos anteriores obtenemos una ecuación de dos variables. Después tomamos otra pareja de las ecuaciones y volvemos hacer una ecuación de dos variables. Esta segunda ecuación, de dos variables, la obtenemos asegurándonos de que tenga las mismas dos variables que tiene la primera ecuación de dos variables que obtuvimos. Resolvemos estas dos ecuaciones de dos variables con alguno de los métodos que vimos anteriormente. Los dos valores que obtenemos de esto, los sustituimos en alguna de las ecuaciones iniciales para obtener una ecuación de una variable. Resolviendo esa ecuación obtenemos el valor de la tercera variable.

Ejemplo:

Tenemos las tres ecuaciones $3x + 2y - 5z = 2$, $2x - 4y + 3z = -3$ y $4x - y + 4z = 6$. Tomamos la primera y segunda ecuación. Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos con la segunda ecuación para obtener la ecuación de dos variables $8x - 7z = 1$. Ahora tomamos la primera y la tercera ecuación. Como la primera ecuación de dos variables tiene las variables x y z, tenemos que eliminar la variable y aquí también. Para eso multiplicamos la tercera ecuación por dos y la sumamos con la primera para obtener la ecuación $11x + 3z = 14$. Así, obtenemos las ecuaciones simultáneas $8x - 7z = 1$ y $11x + 3z = 14$.

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas, obtenemos $x = 1$ y $z = 1$. Sustituyendo estos dos valores en la primera ecuación obtenemos la ecuación $3(1) + 2y - 5(1) = 2$. Si resolvemos esta ecuación, obtenemos $y = 2$.

Actividad de desarrollo

Pensamiento sistémico

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

ATRIBUTO

- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones simultáneas.
   a. $2x + 4y = 12$
      $-x + 5y = 8$
   b. $15x - 4y = 10$
      $4x - 2y = -2$
   c. $x + 2y - z = -1$
      $-2x + 5y - 2z = 4$
      $4x - y + 3z = 6$
2. Comparte el proceso de tus operaciones con tus compañeros y contrasta los resultados. Si tienen diferencias, lleguen entre todos al resultado correcto.

Solución de problemas aplicados a nuestro entorno

Estas ecuaciones aparecen en problemas de la vida real como en la física o cuando queremos calcular un valor del que conocemos información sobre ese valor. Por ejemplo, cuando hacemos compras y después de la compra sólo conocemos el costo final de todo el conjunto de productos, pero no el precio individual de cada artículo que compramos. Para resolver estos problemas, vamos a asociarle una variable a los valores que se buscan y construimos las ecuaciones con los datos que tenemos en el problema.

Ejemplos:

1. Alicia compra en el mercado 2 kilos de papa y 3 kilos de zanahoria; por ello, paga 40 pesos. Una semana después va al mercado y compra 3 kilos de papa y un kilo de zanahoria. Esa vez paga 39 pesos. ¿Cuánto cuesta el kilo de papa y el kilo de zanahoria?
   Para resolver este problema hacemos:
   p = precio del kilo de papa.
   z = precio del kilo de zanahoria.
   Esto nos da las ecuaciones:
   $2p + 3z = 40$
   $3p + z = 39$
   Aquí podemos despejar a z de la segunda ecuación obteniendo: $z = 39 - 3p$.

Esto lo podemos sustituir en la primera ecuación, para obtener $2p + 3(39 - 3p) = 40$. Simplificando esto, obtenemos: $-7p + 117 = 40$. Si resolvemos esta ecuación, obtenemos, $p = 11$. Sustituimos el valor de p en la segunda ecuación para obtener $3(11) + z = 39$. Resolviendo la ecuación, obtenemos: $z = 6$.

Esto quiere decir que Alicia pagó 11 pesos por kilo de papa y 6 pesos por kilo de zanahoria.

2. En una fiesta hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que el doble del número de mujeres más el triple del número de niños es igual al doble del número de hombres. También se sabe que el número de hombres es el doble del de muje-

NO ABANDONO

"La educación no cambia al mundo, cambia a las personas que van a cambiar el mundo".
Paulo Freire

res. ¿Cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños están en la fiesta?
Aquí hacemos lo siguiente:

h = número de hombres.

m = número de mujeres.

n = número de niños.

Así, obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

$h + m + n = 22$

$2m + 3n = 2h$

$2h = m$

Si simplificamos estas ecuaciones obtenemos:

$h + m + n = 22$

$2m + 3n - 2h = 0$

$h = 2m$

En este caso, tomamos la tercera ecuación y la sustituimos en las primeras dos para obtener:

$2m + m + n = 22$

$2m + 3n - 2(2m) = 0$

Simplificamos estas dos ecuaciones y obtenemos:

$3m + n = 22$

$-2m + 3n = 0$

Multiplicando la primera ecuación por (–3) y sumando la ecuación resultante con la segunda ecuación obtenemos:

$-11m = -66$

Con eso obtenemos que $m = 6$. Sustituyendo esto en la tercera ecuación inicial, obtenemos $h = 12$. Si sustituimos estos dos valores en la primera ecuación, obtenemos la ecuación $12 + 6 + n = 22$. Si resolvemos esta ecuación obtenemos $n = 4$.

Esto quiere decir que en la fiesta asistieron 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.

Cuando resolvemos estas ecuaciones podemos llegar a dos situaciones.

Es posible que en el proceso de resolver la ecuación, lleguemos a una ecuación que no puede ser cierta (como 3 = 4). Si llegamos a esta situación, concluimos que las ecuaciones simultáneas no tienen solución.

Ejemplo:

Tomemos las ecuaciones:

$3x + 2y = 4$

$-6x - 4y = 7$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos con la segunda ecuación, obtenemos 0 = 15. Así, concluimos que no hay dos números que resuelvan las ecuaciones simultáneas.

La segunda situación es cuando obtenemos una ecuación que es cierta sin importar los valores de las variables (como 0 = 0). Con esto concluimos que las ecuaciones simultáneas tienen una infinidad de resultados para ambas variables.

Ejemplos:

Tenemos las ecuaciones:

$6x - 9y = 15$

$-2x + 3y = -5$

Si multiplicamos la segunda ecuación por 3 y la sumamos con la primera ecuación, obtenemos 0 = 0. Así, concluimos que las ecuaciones simultáneas tienen una infinidad de soluciones. Veamos que $x = 1$ y $y = -1$ es una solución de las ecuaciones, pero también lo es $x = 4$ y $y = 1$, entre otras posibilidades.

CURIOSIDADES

El despiste de David Hilbert

El matemático alemán David Hilbert (1862-1943) recibió en su casa a un profesor recién llegado a la Universidad de Gotinga. Después de presentarse, el invitado se quitó el sombrero y se sentó. Al cabo de unos minutos de conversación, Hilbert, que probablemente tenía la cabeza en otros menesteres, decidió que la visita ya había durado lo suficiente y poniéndose el sombrero de su invitado, se despidió cortésmente y se fue de su propia casa.

Actividad de cierre

Tolerancia

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno los ejercicios.

1. El perímetro de un cuarto rectangular es 18 m, y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Halla las dimensiones del cuarto.
2. Si una sala tuviera 1 m más de largo y 1 m más de ancho, el área sería 26 m^2 más de lo que es ahora, y si tuviera 3 m menos de largo y 2 m más de ancho, el área sería 19 m^2 mayor que ahora. Halla las dimensiones de la sala.
3. Un arriero compró un carro, un caballo y sus arreos por $200. El carro y los arreos costaron $20 más que el caballo, y el caballo y los arreos costaron $40 más que el carro. ¿Cuánto costó el carro, cuánto el caballo y cuánto los arreos?
4. La suma de las dos cifras de un número es 6, y si al número se le resta 36, las cifras se invierten. Halla el número.
5. Un pájaro, volando a favor del viento, recorre 55 Km en 1 hora, y en contra del viento, 25 Km en 1 hora. Halla la velocidad en Km por hora del pájaro en aire tranquilo y del viento.
6. Un hombre compró cierto número de libros. Si hubiera comprado 5 libros más por el mismo dinero, cada libro le habría costado $2 menos, y si hubiera comprado 5 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado $4 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto pagó por cada uno?
7. Un comerciante empleó $1 910 en comprar 50 trajes de $40 y de $35. ¿Cuántos trajes de cada precio compró?
8. 7 kilos de café y 6 de té cuestan $4.80, 9 kilos de té y 8 de café cuestan $6.45. ¿Cuánto cuesta un kilo de café y cuánto un kilo de té?
9. Si al numerador de una fracción se resta 1, el valor de la fracción es 1, y si al denominador se resta 2, el valor de la fracción es 2. Halla la fracción.
10. Dos bolsas tienen 200 pesos distribuidos de manera desigual entre ambas. Si de la bolsa que tiene más dinero se sacan 15 pesos y se ponen en la otra, ambas tendrían lo mismo. ¿Cuánto tiene cada bolsa?
11. Compré un caballo, un coche y un perro. El perro me costó $20. El caballo y el perro costaron el triple que el coche; el perro y el coche $\frac{3}{5}$ de lo que costó el caballo. Halla el precio del caballo y del coche.
12. Un número de dos cifras equivale a 6 veces la suma de sus cifras, y si al número se le resta 9, las cifras se invierten. Halla el número.
13. Halla tres números tales que la suma del 19 y el 29 exceda en 18 al tercero; la suma del 19 y el 39 exceda en 78 al segundo, y la suma del 29 y el 39 exceda en 102 al primero.
14. Ayer gané $10 más que hoy. Si lo que gané hoy es los 5 de lo que gané ayer, ¿cuánto gané cada día?
15. El perímetro de una sala rectangular es 56 m. Si el largo se disminuye en 2 m y el ancho se aumenta en 2 m, la sala se hace cuadrada. Halla las dimensiones de la sala.

2. Compara tus resultados con los de otro compañero. Si tuvieran diferencias, revisen los procedimientos usados y las operaciones realizadas para llegar, entre los dos, a la respuesta correcta.

Recapitulación

Preevaluación

Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 3.1" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.

1. La igualdad tiene ____________ propiedades y éstas son: ____________, ____________,

   ____________, ____________, ____________ y ____________.

2. El 0 y el 1 es la ____________ de la suma y la multiplicación, respectivamente.

3. Para todo número real a existe un número b tal que $a - b = 0$. Al número b lo llamamos

   ____________ de a.

4. Hay tres formas de resolver ecuaciones simultáneas. Éstas son: ____________, ____________

   y ____________.

5. Hay tres posibilidades de solución con ecuaciones simultáneas:

   a. Una solución (cuando obtenemos ____________ para x y un ____________ para y).

   b. Ninguna solución (cuando obtenemos algo que ____________ como 0 = 1).

   c. Una infinidad de soluciones (cuando obtenemos algo que ____________ como 1 = 1).

Realiza tu evaluación parcial.

1. Resuelve ecuaciones de primer grado aplicando propiedades de la igualdad y comprueba tu resultado.

   1. $5 + 6x = 2$

   2. $4b + 1 = -18$

   3. $3[2 - (3j - 6)] + 4[6j - (1 - 2j)] = 4 - 5j$

Valor: 2 puntos

2. Resuelve problemas teórico-prácticos aplicando ecuaciones de primer grado con una y dos variables.

   1. ¿Cuál es el número que multiplicado por dos es cuatro unidades menos que 3 veces 6?

   2. En una reunión se cuentan tantos caballeros como 3 veces el número de damas. Después que se retiran 8 parejas el número de caballeros que aún quedan es igual a 5 veces el número de damas. ¿Cuántos caballeros había inicialmente?

Valor: 2 puntos

Actividad de evaluación 3.1.1

Atención

VALORES

TIC

EVALUACIÓN

RÚBRICA

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno la serie de ejercicios propuesta en tres partes, aplicando las propiedades de un campo, estrategias para resolver sistemas de ecuaciones lineales con una, dos o tres incógnitas.

Parte 1. Ecuaciones de primer grado con una variable.

1. Resuelve en tu cuaderno los 5 ejercicios y los 3 problemas propuestos, siguiendo los puntos que se enlistan.
   - Aplica ecuaciones de primer grado con una incógnita con signos de agrupación y fraccionarias.
   - Fundamenta tu respuesta en un ejercicio aplicando propiedades y postulados de la igualdad.
   - Comprueba tu resultado obtenido.
   - Representa con un dibujo o diagrama la solución de los problemas, colocando todos los datos y los valores dados para obtener la solución.
2. Resuelve las ecuaciones.

   a. $18c - 3 = 0$

   b. $5 - 2d = 9$

   c. $-3f + 1 = 4$

   d. $48p - 13 + 12p = 72p - 3 - 24p$

   e. $q - 3 + 6q - 9 + 12q - 15 = q$
3. Resuelve los problemas.

   a. Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

   b. La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 centímetros?

Parte 2. Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

1. Resuelve en tu cuaderno los 3 ejercicios y el problema propuestos, siguiendo los puntos que se enlistan.
   - Aplica métodos de solución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas de primer grado, como: sustitución, igualación y reducción, planteando el sistema de ecuaciones que representa el problema, realizando las operaciones necesarias para obtener la solución.
   - Comprueba tu resultado obtenido.
   - Representa con un dibujo o diagrama la solución de los problemas, colocando todos los datos y los valores dados para obtener la solución.
2. Resuelve los sistemas de ecuaciones.

a. $3x + 2y = 6$	b. $-3x + 2y = 6$	c. $4x - 5y = 16$
$6x + y = 4$	$6x - y = 4$	$-3x + 4y = -11$

2. Resuelve el problema usando ecuaciones simultáneas de dos variables.

En un puesto de verduras se han vendido 2 Kg de naranjas y 5 Kg de papas por 835 pesos y 4 Kg de naranjas y 2 Kg de papas por $1 285. Calcula el precio de los kilogramos de naranja y papa.

Parte 3. Sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

1. Resuelve en tu cuaderno los 2 ejercicios y el problema propuestos, siguiendo los puntos que se enlistan.

- Aplica métodos de solución de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas de primer grado, como: sustitución y reducción.
- Plantea el sistema de ecuaciones que representa el problema.
- Realiza las operaciones necesarias para obtener la solución.
- Comprueba tus resultados.
- Representa con un dibujo o diagrama la solución de los problemas, colocando todos los datos y los valores dados para obtener la solución.

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones.

a. $2x + y - 3z = -1$

$x - 3y - 2z = -12$

$3x - 2y - z = -5$

b. $6x + 3y + 2z = 12$

$9x - y + 4z = 37$

$108 + 5y + 3z = 21$

2. Resuelve el siguiente problema.

Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

a) El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.

b) El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.

c) El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.

Se necesita saber qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

2. Al finalizar, copia los ejercicios de las tres partes en un documento de Word, incluyendo la representación que hiciste con un dibujo o diagrama de la solución de los problemas, colocando todos los datos y los valores dados para obtener la solución.

3. En cada ejercicio explica textualmente los procedimientos y métodos aplicados, y los resultados que obtuviste paso por paso.

4. Revisa que la redacción de la descripción de los procedimientos y métodos aplicados tenga orden, claridad, concisión y precisión, y la ortografía sea correcta.

5. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos, profesor, fecha, número de evaluación y los datos de la serie de ejercicios.

6. Antes de entregar a tu profesor, en documento de Word, tu serie de ejercicios, realiza tu "Autoevaluación 3.1.1" que se encuentra al final de esta unidad en la sección "Instrumentos de evaluación". Revisa si tu trabajo cumple con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de entregarlo.

7. Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo en Word impreso a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza.

10 horas

3.2 Resuelve problemas reales, mediante ecuaciones cuadráticas

En ciertos momentos, las ecuaciones con las que nos podemos encontrar no serán lineales, sino cuadráticas. Estas últimas ecuaciones son usuales en problemas de física. Por ejemplo, al aventar una piedra al aire podemos modelar la trayectoria de esta piedra con ayuda de una ecuación cuadrática.

Actividad de inicio

Conciliación VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. • **Disciplinar:** 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
ATRIBUTO	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

1. De manera individual, factoriza en tu cuaderno las siguientes expresiones algebraicas.

1. $x^2 - 4x + 12$
2. $x^2 + 2x - 63$
3. $x^2 - 8x + 15$

2. Contrasta tus procedimientos y resultados con tus compañeros. Si tienen diferencias, lleguen a un acuerdo de la respuesta correcta.

Identificación de características de la ecuación cuadrática

JUEGO 9 DIGITAL

Hay dos tipos de ecuaciones cuadráticas: las completas y las incompletas. Una vez identificado de qué tipo es una ecuación cuadrática, podemos usar una de varias formas de resolver esta ecuación.

Definición de ecuación cuadrática

Se le llama cuadrática a aquella ecuación de una sola variable, que podemos identificar si el mayor exponente que la variable tiene es dos.

Ejemplos:

1. $x^2 = 16$
2. $2x + 3x^2 = 0$
3. $x^2 + x^3 + 1 = 3$ no es ecuación cuadrática porque el mayor exponente de la variable es 3.

Ecuación cuadrática completa

Decimos que una ecuación cuadrática es completa si es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y decimos que la ecuación cuadrática es incompleta se es de alguna de las siguientes formas:

1. $ax^2 = 0$
2. $ax^2 + bx = 0$
3. $ax^2 + c = 0$

Ecuación cuadrática incompleta

Las ecuaciones cuadráticas incompletas se resuelven de la siguiente forma:

1. Ecuación de la forma $ax^2 = 0$:

   Aquí la solución es $x = 0$

   Ejemplos:

   a) $3x^2 = 0$, tiene solución $x = 0$

   b) $15a^2 = 0$, tiene solución $x = 0$

2. Ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$:

   En este caso factorizamos el factor común x de la expresión, obteniendo $x(ax + b) = 0$

   Esto quiere decir que uno de los dos factores tienen que ser cero. En otras palabras, tenemos $x = 0$ o $ax + b = 0$.

   Así, vemos que las soluciones de esta ecuación son: $x = 0$ y $x = -\dfrac{b}{a}$

   Ejemplos:

   a) Tenemos la ecuación cuadrática $4x^2 - 8x = 0$. Factorizamos la ecuación y obtenemos $x(4x - 8) = 0$. Ahora resolvemos la ecuación $4x - 8 = 0$,y obtenemos: $x = 2$. Entonces, las soluciones de esta ecuación cuadrática son: $x = 0$ y $x = 2$.

   b) Tenemos la ecuación cuadrática $5x^2 + 3 = 0$. Factorizamos la ecuación y obtenemos $x(5x + 3) = 0$. Resolvemos la ecuación $5x + 3 = 0$, y obtenemos: $x = -\dfrac{3}{5}$. Entonces, las soluciones de la ecuación cuadrática son: $x = 0$ y $x = -\dfrac{3}{5}$

3. Ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$:

   En este caso, despejamos a x^2 en la ecuación para obtener la ecuación $x^2 = -\dfrac{c}{a}$

Sacamos la raíz cuadrada para obtener $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$. Esto quiere decir que las soluciones son $x = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ y $x = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$. En el caso de que $-\dfrac{c}{a}$ sea negativo, la ecuación no tendrá soluciones, ya que no podemos sacar la raíz cuadrada de un número negativo.

Ejemplos:

a) Tenemos la ecuación cuadrática $4x^2 - 16 = 0$. Despejamos a x^2, obteniendo $x^2 = 4$. Sacando la raíz cuadrada obtenemos que las soluciones $x = 2$ y $x = -2$.

b) Tenemos la ecuación cuadrática $3x^2 + 6 = 0$. Despejamos a x^2, obteniendo $x^2 = -2$. Aquí no podemos sacar la raíz cuadrada ya que le sacaríamos la raíz cuadrada a un número negativo. Por lo tanto, esta ecuación no tiene solución.

NO ABANDONO

"Las matemáticas son un lugar donde puedes hacer cosas que no puedes hacer en el mundo real".

Marcus du Sautoy

Actividad de desarrollo

Tesón

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
ATRIBUTO	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

1. $123x^2 = 0$
2. $76x^2 = 0$
3. $x^2 - 25 = 0$
4. $6x^2 - 216 = 0$
5. $x^2 - 4x = 0$
6. $x^2 + 54x = 0$

2. Comparte el proceso de tus operaciones con tus compañeros y contrasta los resultados. Si tienen diferencias, lleguen entre todos al resultado correcto.

Aplicación de métodos de solución de una ecuación cuadrática en una variable

Tenemos tres formas para resolver una ecuación cuadrática completa ($ax^2 + bx + c = 0$). Las tres formas nos llevarán al mismo resultado. Aun así es conveniente tener más de una forma de resolver el problema porque habrá veces donde la ecuación será más fácil de resolver con una que con las otras dos.

Factorización

Podemos factorizar al trinomio $ax^2 + bx + c$ usando el método de factorización visto en la unidad 2. Así, tenemos la ecuación ($\frac{(ax+p)(ax+q)}{a} = 0$). Multiplicamos la ecuación por a y obtenemos la ecuación $(ax + p)(ax + q) = 0$. Sabemos que esta ecuación se cumple si $ax + p = 0$ o $ax + q = 0$. Entonces, las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = -\frac{p}{a}$ y $x = -\frac{q}{a}$

Ejemplos:

1. Tenemos la ecuación cuadrática $9x^2 + 3x - 2 = 0$. Factorizamos el trinomio obteniendo $\frac{(9x-9)(9x+6)}{9} = 0$. Así, obtenemos la ecuación $(9x - 3)(9x + 6) = 0$. Para encontrar las soluciones, resolvemos las ecuaciones $9x - 3 = 0$ y $9x + 6 = 0$, obteniendo $x = \frac{1}{3}$ y $x = -\frac{2}{3}$. Éstas son las soluciones de la ecuación cuadrática.
2. Tenemos la ecuación cuadrática $8x^2 - 16x - 10 = 0$. Factorizamos el trinomio obteniendo $\frac{(8x+4)(8x-20)}{8} = 0$. Así, obtenemos la ecuación $(8x + 4)(8x - 20) = 0$. Para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática, tenemos que resolver $8x + 4 = 0$ y $8x - 20 = 0$. Entonces, las soluciones son: $x = -0.5$ y $x = 2.5$.

Actividad de desarrollo

Atención

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno, por factorización, las siguientes ecuaciones:

1. $4x^2 + 4x - 3 = 0$
2. $9x^2 + 30x + 9 = 0$
3. $x^2 - 4x - 12 = 0$

2. Verifica tus resultados con un compañero, luego compártanlos con el resto del grupo.

Completando el trinomio cuadrado perfecto

Para resolver una ecuación cuadrática completando el trinomio cuadrado perfecto, tenemos que sumarle algo a la ecuación para que aparezca un cuadrado perfecto que podamos factorizar y así resolver la ecuación.

Ejemplo:

Tenemos la ecuación cuadrática $4x^2 + 12x - 7 = 0$. Para encontrar el trinomio cuadrado perfecto, tomamos al trinomio y lo escribimos de la siguiente forma:

$(2x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2x - 7$

Elevamos al tres al cuadrado para obtener 9, y así, obtenemos el número que tenemos que sumarle a la ecuación.

Lo que resulta en la ecuación $4x^2 + 12x + 9 - 7 = 9$. Factorizamos al trinomio cuadrado perfecto y obtenemos la ecuación:

$(2x + 3)^2 - 7 = 9$

Despejamos el cuadrado y obtenemos la ecuación:

$(2x + 3)^2 = 16$

Ahora sacamos la raíz cuadrada para obtener la ecuación:

$2x + 3 = \pm 4$

Las soluciones de la ecuación las encontramos resolviendo las ecuaciones $2x + 3 = 4$ y $2x + 3 = -4$. Así, obtenemos que las soluciones son: $x = 0.5$ y $x = -2.5$

Actividad de desarrollo

Colaboración

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

ATRIBUTO

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno completando el cuadrado perfecto las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + 8x + 2$
2. $4x^2 + 12x - 4 = 0$
3. $16x^2 + 64x + 7$

2. Compara tus respuestas con un compañero y después expónganlas ante el grupo.

Por fórmula general

La tercera forma para resolver un ecuación cuadrática completa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es usando una fórmula general. Ésta nos da que las soluciones son:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esto lo podemos escribir de la forma:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

1. Tenemos la ecuación cuadrática $2x^2 + 2x - 12 = 0$. Aquí, $a = 2$, $b = 2$ y $c = -12$. Sustituimos estos valores en la fórmula general y obtenemos que:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)} = \frac{-2 + \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{100}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4}$$

Así, las soluciones son:
$x = 2$ y $x = -3$.

2. En la ecuación cuadrática $-3x^2 - 6x + 24 = 0$ tenemos que $a = -3$, $b = -6$ y $c = 24$. Sustituimos estos valores en la fórmula general y obtenemos que:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-3)(24)}}{2(-3)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{-6} = \frac{6 \pm \sqrt{324}}{-6} = \frac{6 \pm 18}{-6}$$

Así, tenemos que las soluciones son:
$x = -4$ y $x = 2$.

El método por fórmula general también sirve para ecuaciones cuadráticas incompletas. En este caso vamos a tener que:

Ecuación cuadrática incompleta	Consideración para fórmula general
ax^2	$b = 0$ y $c = 0$
$ax^2 + bx$	$c = 0$
$ax^2 + c$	$b = 0$

Actividad de desarrollo

Comunicación

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno con fórmula general las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 12x - 36 = 0$
2. $2x^2 + 14x + 20 = 0$
3. $0.5x^2 + x - 4 = 0$
4. $x^2 - 25 = 0$
5. $x^2 + 6x = 0$

2. Verifica tus resultados con un compañero; luego, compártanlos con el resto del grupo.

Uso del discriminante de la fórmula general

El discriminante en una ecuación cuadrática es un valor que depende de la ecuación con la trabajamos. De éste va a depender si la ecuación se puede resolver, y por lo tanto, vale la pena aplicar alguno de los métodos que ya vimos para resolver estas ecuaciones. También nos dirá cuántas soluciones debemos esperar.

Procedimiento para el cálculo del discriminante

El discriminante de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es: $D = b^2 - 4ac$.

Si nos fijamos en el último método de solución de ecuaciones cuadráticas, podemos ver que ésta es la expresión que encontramos debajo de la raíz en la fórmula general.

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Interpretación del tipo de soluciones

Para el discriminante, existen tres distintos casos que nos dirán cuántas soluciones reales tiene la ecuación cuadrática:

1. **$D > 0$:** la ecuación cuadrática tendrá exactamente dos soluciones reales.

Ejemplo:

Tenemos la ecuación cuadrática $2x^2 - 7x + = 0$. Aquí $a = 2$, $b = -7$ y $c = 4$. Entonces, el discriminante de esta ecuación es: $D = (-7)^2 - 4(2)(4) = 49 - 32 = 17 > 0$. Esto quiere decir que la ecuación cuadrática tiene exactamente dos soluciones.

2. **$D = 0$:** la ecuación cuadrática tiene sólo una solución real.

Ejemplo:

Tenemos la ecuación cuadrática $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Aquí $a = 3$, $b = -12$ y $c = 12$. Entonces, el discriminante de esta ecuación es: $D = (-12)^2 - 4(3)(12) = 0$. Esto quiere decir que la ecuación cuadrática tiene sólo una solución.

3. **$D < 0$:** la ecuación tiene cero soluciones reales (también decimos que tiene dos soluciones imaginarias).

Ejemplo:

Tenemos la ecuación cuadrática $4x^2 + 8x + 6 = 0$. Aquí $a = 4$, $b = 8$ y $c = 6$. Entonces, el discriminante de esta ecuación es $D = 8^2 - 4(4)(6) = 64 - 96 = -32 < 0$. Esto quiere decir que la ecuación cuadrática no tiene solución.

NO ABANDONO

"Me lo contaron y lo olvidé; lo vi y lo entendí; lo hice y lo aprendí". Confucio, filósofo y maestro chino

Solución de problemas donde apliquen ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas nos van a ayudar a resolver ciertos problemas de la vida real. Como en las ecuaciones lineales, será importante primero identificar el valor que se busca y asignarle una variable.

Incompleta

Cuando la ecuación cuadrática que encontramos en un problema es incompleta, deberemos usar uno de los métodos que hemos visto. También recordemos que podemos resolver la ecuación con ayuda de la fórmula general.

Ejemplo:

1. Si elevo mi edad al cuadrado, será lo mismo si multiplico mi edad por 23.

   Para resolver este problema, le asignamos a la edad la variable x.

   En otras palabras hacemos: x = edad.

   Así, obtenemos la ecuación: $x^2 = 23x$

   Si despejamos esta ecuación, obtenemos: $x^2 - 23x = 0$

   Podemos ver que esta ecuación es una ecuación cuadrática incompleta. En este caso, tenemos que factorizar al factor común x, obteniendo: $x(x - 23) = 0$

   Entonces, las posibles soluciones son $x = 0$ o $x = 23$. Eso quiere decir que tengo 0 años o 23 años.

Completa

Por lo general, los problemas que nos encontraremos serán de ecuaciones cuadráticas completas. Aquí, otra vez, usaremos uno de los métodos que hemos vistos para resolver ecuaciones cuadráticas completas.

Ejemplos:

1. Buscamos dos números naturales que se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580.

   Aquí asociamos:

   x = primer número natural.

   y = segundo número natural.

   El ejercicio nos da información que podemos escribir como $x + 2 = y$ y $x^2 + y^2 = 580$. Si sustituimos la primera ecuación en la segunda, obtenemos la ecuación:

   $x^2 + (x + 2)^2 = 580$

   Simplificando esta ecuación obtenemos:

   $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 580$

   Que nos da la ecuación:

   $2x^2 + 4x + 4 - 580 = 0$

   Con lo que llegamos a la ecuación cuadrática completa:

   $2x^2 + 4x - 576 = 0$

   Resolvemos esta ecuación con la fórmula general. Entonces, $a = 2$, $b = 4$ y $c = -576$, así que:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-576)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4\,608}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{4\,624}}{4} = \frac{-4 \pm 68}{4}$$

   Esto nos da que las soluciones de la ecuación son:

   $x = 16$ o $x = -18$

   Con esto podemos concluir que los números naturales buscados son $x = 16$ y $y = 18$ o $x = -18$ y $y = -16$. El valor de y lo obtenemos sustituyendo el valor de x en alguna de las ecuaciones iniciales.

2. Tenemos un rectángulo cuyo ancho es 7 centímetros más pequeño que su largo. También sabemos que el área de este rectángulo es 44 centímetros cuadrados.

   Aquí tenemos la ecuación $x(x + 7) = 44$. Esto nos da la ecuación cuadrática completa: $x^2 + 7x - 44 = 0$

   Resolvemos esta ecuación con ayuda de la fórmula general, viendo que $a = 1$, $b = 7$ y $c = -44$.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-44)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 176}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-7 \pm 15}{2}$$

   Esto nos da las soluciones:

   $x = 4$ y $x = -11$

   Como un lado de un rectángulo no puede tener una longitud de -11, la única solución que tiene sentido para este problema es $x = 4$.

   Así que el largo del rectángulo es 11 centímetros y el ancho es 4 centímetros.

Actividad de cierre

Comunicación

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
ATRIBUTO	• Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. En equipo de tres integrantes, resuelvan en su cuaderno las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando el método que más convenga:

1. $3x^2 - 27 = 0$
2. $x^2 - 64 = 0$
3. $3x^2 - 27 = 9$
4. $2x^2 - 100 = 40$
5. $6x^2 - 500 = -40$
6. $6x^2 - 2x = 0$
7. $x^2 + x = 0$
8. $4x^2 + 16x = 0$
9. $2x^2 - 6x = 0$
10. $x^2 + x + 1 = 0$
11. $x^2 + 3x + 6 = 0$
12. $x^2 - 3x - 12 = 0$

2. Respondan en grupo las siguientes preguntas:

- ¿De qué manera llegaron a un acuerdo en equipo para determinar el método que más convenía en cada caso?
- ¿Qué criterios tomaron para determinar los métodos utilizados para resolver las ecuaciónes?

NO ABANDONO

"No ganas una vez de vez en cuando, no haces las cosas bien de vez en cuando; las haces bien todo el tiempo. Ganar es un hábito. Desafortunadamente, también lo es perder."

Vince Lombardi

Recapitula lo que aprendiste en el "Resultado de aprendizaje 3.2" y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.

1. Escribe los datos que faltan para completar las definiciones.
   1. Una ecuación cuadrática incompleta es de la forma __________, __________ o __________.
   2. Una ecuación cuadrática completa es de la forma __________.
   3. El discriminante de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es D=__________.
   4. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es __________, sabemos que la ecuación tiene exactamente dos soluciones.
   5. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es __________, sabemos que la ecuación tiene exactamente una solución.
   6. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es __________, sabemos que la ecuación no tiene soluciones.

Realiza tu evaluación parcial.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando el método que más convenga.
   1. $10x^2 + 4x + 20 = 100x^2 - 20$
   2. $10x^2 + 20 = 100x^2 - 20x - 3$
   3. $10x + 20x^2 = 100x^2 - 20x - 3x$
   4. $5x(3x + 5) = 100$
   5. $5x(3x + 20) = x(2x + 3)$
   6. $-x(9x + 40) = x(-2x + 3)$

Valor: 3 puntos

Actividad de evaluación 3.2.1

Puntualidad

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

TIC

EVALUACIÓN

RÚBRICA

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno la serie de ejercicios propuesta en tres partes, aplicando los métodos de identificación y solución de las ecuaciones cuadráticas de una variable.

Parte 1. Ecuación cuadráticas incompletas

1. Resuelve en tu cuaderno los 5 ejercicios y los 2 problemas, propuestos, considerando los siguientes puntos:

- Aplica métodos de solución de ecuaciones cuadráticas incompleta.
- Plantea la relación que existe entre los datos y la incógnita del problema.
- Genera la ecuación que representa el problema.
- Resuelve la ecuación por alguno de los métodos.
- Expresa la solución del problema.
- Comprueba los resultados obtenidos.
- Explica en qué momento la ecuación de segundo grado incompleta no tiene solución dentro de los números reales, y muestra un ejemplo.

Ejercicios:

a. $x^2 - 16 = 0$

b. $x^2 + 6x = 0$

c. $23\,x^2 = 0$

d. $x^2 + 45 = 0$

e. $x^2 - 14x = 0$

Problemas:

a. Si elevo un número al cuadrado y le resto 121, ¿cuál es el número con el que empecé?

b. El producto de dos números es 180 y su cociente $\frac{5}{4}$. Halla los números.

Parte 2. Ecuación cuadráticas completas

1. Resuelve los 5 ejercicios y 2 los problemas, propuestos, considerando los siguientes puntos:

- Aplica métodos de solución de ecuaciones cuadráticas completa.
- Plantea la relación que existe entre los datos y la incógnita del problema.
- Genera la ecuación que representa el problema.
- Resuelve la ecuación por alguno de los métodos.
- Expresa la solución del problema.

- Comprueba los resultados obtenidos.
- Explica en qué momento la ecuación de segundo grado completa no tiene solución dentro de los números reales, y muestra un ejemplo.

Ejercicios con ecuaciones:

a. $x^2 + 2x + 1 = 0$

b. $x^2 + x + 6 = 0$

c. $x^2 - 4x - 12 = 0$

d. $2x^2 + 18x + 60 = 6$

e. $3x^2 + 24x - 100 = -40$

Problemas:

a. Un hombre compró cierto número de caballos por $2000. Se le murieron 2 caballos y vendiendo cada uno de los restantes a $60 más de lo que le costó cada uno, ganó en total $80. ¿Cuántos caballos compró y cuánto le costó cada uno?

b. Entre cierto número de personas compran un auto que vale $1 200. El dinero que paga cada persona excede en 194 al número de personas. ¿Cuántas personas compraron el auto?

Parte 3. Discriminante

1. Calcula el discriminante de las siguientes 5 ecuaciones e identifica cuántas soluciones reales tiene cada una, considerando los siguientes puntos:
   - Describe la solución de la ecuación cuadrática por medio del discriminante.
   - Contesta de manera escrita qué tipo de solución es: real, cero o imaginaria.
   - Responde: si el discriminante tiene un valor negativo, ¿cuál será su posible resultado?

   Ecuaciones:

   a. $4x^2 + 5x - 1 = 0$

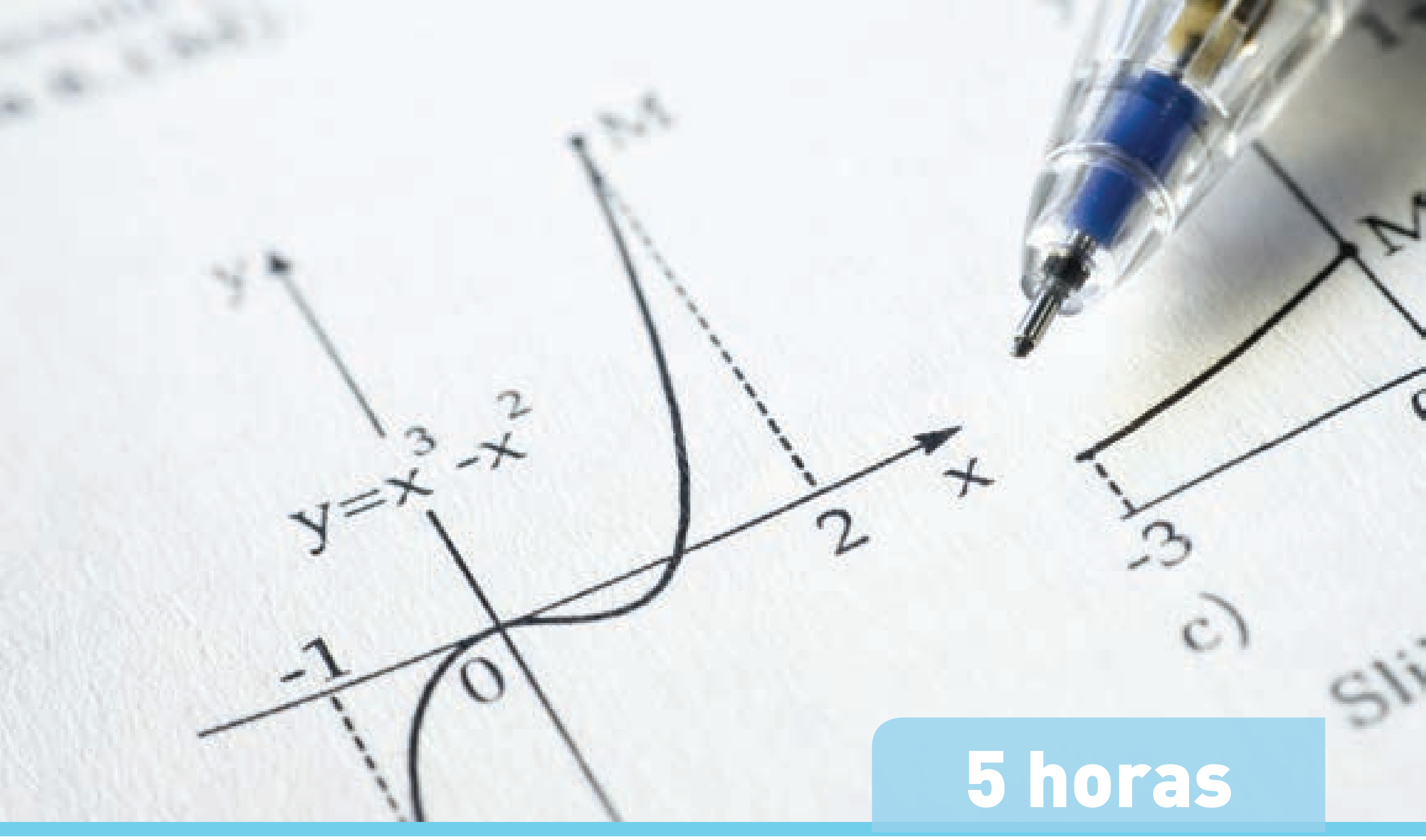
   b. $12x^2 - 12x + 3 = 0$

   c. $5x^2 - 7x + 23 = 0$

   d. $3x^2 + 2x + 5 = 0$

   e. $2x^2 + 3x + 1 = 0$

2. Al finalizar, copia los ejercicios de las tres partes en un documento de Word, incluyendo la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios y lo que se te solicitó en cada punto de las tres partes.
3. Revisa que la redacción de tu trabajo tenga orden, claridad, concisión y precisión, así como que la ortografía sea correcta.
4. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha y número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.
5. Antes de entregar a tu profesor el documento de Word, realiza tu “Autoevaluación 3.2.1” que se encuentra al final de esta unidad en la sección “Instrumentos de evaluación”. Revisa si cumpliste con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de entregarlo.
6. Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo en Word impreso a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza.



5 horas

3.3 Representa situaciones del entorno, empleando los conceptos de función

Una forma de poder resolver ecuaciones en las matemáticas es con el uso de gráficas. Éstas vienen vinculadas con las funciones, y nos permiten visualizar el comportamiento de estas funciones. Al relacionar las funciones con ecuaciones, con el uso de las gráficas podemos visualizar las soluciones de una ecuación. Muchas veces una función es más fácil de entenderse si también tenemos su gráfica.

Actividad de inicio

Curiosidad intelectual — VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. • **Disciplinar:** 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
ATRIBUTO	• Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

1. En pareja, resuelvan los siguientes ejercicios en su cuaderno.

1. Tomen la ecuación $y = -2x + 3$
2. Encuentren los valores de x en esta ecuación con los valores $y = 1$, $y = 3$, $y = 5$
3. Encuentren los valores de y en esta ecuación con los valores $y = 2$, $y = 3$, $y = 4$
4. ¿Notan algo en estos valores de x y de y?

2. Discutan sus resultados y luego compártanlos con el grupo.

Trazo de funciones

JUEGO 10 DIGITAL

Para poder graficar se requiere conocer el concepto de una función, ya que al dibujar la gráfica, obtendremos una forma visual de la función con la que estamos trabajando.

Definición de función

Una función es una expresión que da una relación entre dos medidas. Ésta tomará la forma de una ecuación relacionando una variable dependiente (y) con una expresión algebraica que contiene a una variable independiente (x).

Variable independiente y variable dependiente

La variable y se llama dependiente, ya que va a depender de la variable x. Todo valor que sustituiremos en la variable x, va a influir en el valor de la variable y. Veamos un ejemplo: hay una relación entre la hora del día y la temperatura (ésta se da por la presencia del Sol); entonces, decimos que hay una función que relaciona a éstas, la hora del día y la temperatura. En este caso, la temperatura va a depender de la hora del día, por lo que sería la variable independiente, y la temperatura sería la variable dependiente.

TIC

Ve la película *A beautiful mind* (traducida como *Una mente brillante*), del director Ron Howard (2001), para conocer la historia de John F. Nash (Bluefield, 1928-Monroe, 2015) economista y matemático estadounidense, quien extraordinariamente dotado para el análisis matemático, desarrolló investigaciones en torno a la teoría de juegos, que le valieron el Premio Nobel de Economía en 1994, junto a John Harsanyi y Reinhard Selten:

https://www.youtube.com/watch?v=Wl4bPIRWaic

Notación de funciones

Decimos que una función es de la forma $y = f(x)$. En este caso x es la variable independiente y y la variable dependiente, y $f(x)$ es una expresión algebraica de una variable (esta variable es x). Esto es lo que nos va a dar la ecuación que representará a la función.

Ejemplos:

1. $y = x^2 + 1$ es una función donde $f(x) = x^2 + 1$
2. $y = x^3$ es una función donde $f(x) = x^3$
3. $y = \dfrac{x^4 - 2}{x}$ es una función donde $f(x) = \dfrac{x^4 - 2}{x}$

Métodos de identificación de funciones

Si la expresión algebraica $f(x)$ es una expresión lineal, hablaremos de una función lineal o de grado uno. Si la expresión algebraica $f(x)$ es una expresión cuadrática, hablaremos de una función de grado dos. En general, identificamos al grado de una función con el exponente más alto de la expresión algebraico.

Ejemplos:

1. $y = x^2 + 1$ es una función de grado 2.
2. $y = x^3$ es una función de grado 3.
3. $y = 3x - 1$ es una función de grado 1.

Par ordenado

Decimos que un par ordenado (a,b) es una pareja de números a y b. También decimos que un par ordenado (a,b) cumple una función $y = f(x)$ si $f(a) = b$. Aquí con $f(a)$ nos referimos a sustituir el valor a en la variable x de la expresión $f(x)$.

Ejemplos:

1. Tomemos la función $y = x^2 + 1$. Veamos que la pareja ordenada (3,10) cumple la función, ya que $f(3) = 32 + 1 = 9 + 1 = 10$
2. Tomemos la función $y = x^3$. Veamos que la pareja ordenada (4,64) cumple la función, ya que $f(4) = 43 = 64$
3. Tomemos la función $y = \dfrac{x^4 - 2}{x}$. Veamos que la pareja ordenada (2,6) no cumple la función, ya que $f(2) = \dfrac{2^4 - 2}{2} = \dfrac{16 - 2}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \neq 6$

El conjunto de los valores que una función puede tomar lo llamaremos **dominio**, estos valores son los sustituimos en la variable independiente. El conjunto de los valores que la variable dependiente puede alcanzar lo llamaremos **contradominio.**

Ejemplos:

1. Tenemos la función $y = x + 1$. El dominio de esta función es el conjunto de los números reales. Su contradominio también es el conjunto de los números reales.

2. Tenemos la función $y = \frac{x^2 + 2}{x}$. El dominio de ésta función es el conjunto de los números reales. Su contradominio es el conjunto de los números reales positivos.

3. Tenemos la función $y = \frac{4x + 2}{x}$. El dominio de esta función es el conjunto de los números reales quitando de este conjunto al cero. Su contradominio es el conjunto de los números reales.

Tabla de valores

A cada función se le asocia una tabla de valores donde se mostrarán ciertos valores de *y* dados valores de *x*. Estos valores se encuentran eligiendo valores para *x* y calculando los valores para *y*. Así también identificamos pares ordenados que cumplen la función representada en la tabla de valores. La primera entrada del par ordenado será un valor de la parte superior de la tabla, y la segunda, será su valor correspondiente en la parte inferior.

Ejemplo:

1. Tomemos la función $y = x^2 + 1$. Su tabla de valores es:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = f(x)$	10	5	2	1	2	5	10

2. Tomemos la función $y = x^3$. Su tabla de valores es:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = f(x)$	–27	–8	–1	0	1	8	27

3. Tomemos la función $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$. Su tabla de valores es:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{10}$

Actividad de desarrollo

Colaboración

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

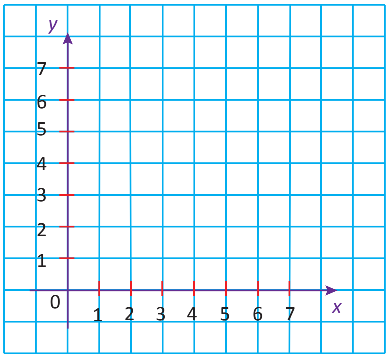
ATRIBUTO

- Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, realiza en tu cuaderno las tablas de valores de las siguientes funciones.
   1. $y = x$
   2. $y = -2x$
   3. $y = 4x + 5$
   4. $y = 3x + 6.3$
   5. $y = \frac{x + 6}{2}$
   6. $y = \frac{x - 9}{3}$
2. Contrasta tus tablas con otro compañero; si hay diferencias, hagan los ajustes que consideren necesario.

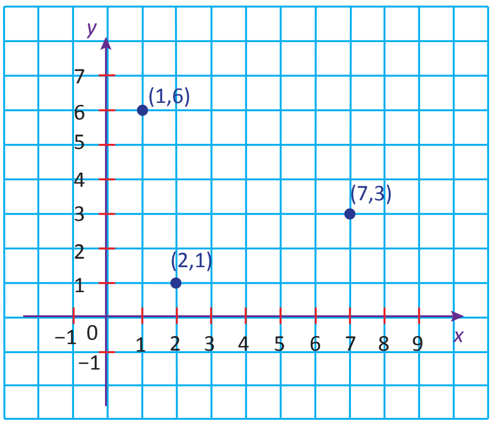
Gráfica

Es posible graficar estas funciones en un sistema coordenado calculando pares ordenados. Un sistema coordenado tiene dos ejes. El eje horizontal será etiquetado con un "x" y el eje vertical será etiquetado con una "y". Cada eje tendrá una escala. Se verá de la siguiente forma:



Un par ordenado va a representar un punto en el sistema coordenado. La primera entrada del par ordenado nos dará la primera coordenada del punto y la segunda entrada será la segunda coordenada del punto. Si queremos marcar un par ordenado en un eje coordenado, debemos tomar la primera entrada del par ordenado para saber cuánto nos tenemos que desplazar sobre el eje x (derecha o izquierda). La segunda entrada del par coordenado nos inidca cuánto nos tenemos que desplazar sobre el eje y (arriba o abajo).

Ejemplos:



En este caso, decimos que el punto P tiene las coordenadas (7,3), Aquí nos desplazamos por 7 unidades a la derecha y tres unidades para arriba. Veamos que es similar con el punto Q que tiene las coordenadas (2,1) y el punto R que tiene las coordenadas (1,6).

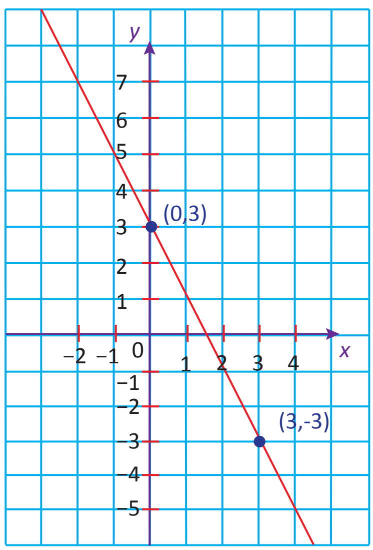
En el sistema coordenado también se puede graficar una función. En este caso, la gráfica de la función es dibujada con ayuda de los pares ordenados que cumplen la función.

Graficar funciones lineales

Cuando queremos graficar una función lineal, basta con buscar dos puntos de la forma (x,y) que cumplen la ecuación $y = ax + b$. Una vez encontrados estos dos puntos, los anotamos en nuestro sistema coordenado y los conectamos con una recta.

Ejemplo:

Tomamos la función lineal $y = -2x + 3$. Veamos que los puntos (0,3) y (3, –3) cumplen la ecuación. La gráfica de esta función se vería así:



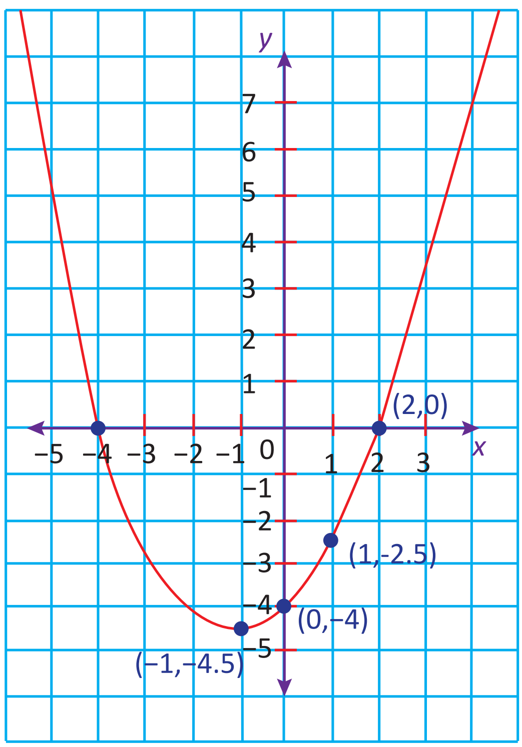
Graficar funciones cuadráticas

Si queremos graficar una función cuadrática, de la forma $y = ax^2 + bx + c$, haremos lo siguiente:

1. Factorizamos al coeficiente a de la expresión algebraica para obtener la función equivalente $y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
2. Después factorizamos la expresión $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, obteniendo al producto $(x + p)(x + q)$, donde $p + q = \frac{b}{a}$ y $pq = \frac{c}{a}$
3. Con esto obtenemos la función $y = a(x + p)(x + q)$. Eso quiere decir que los puntos $(-p,0)$ y $(-q,0)$ son puntos que cumplen la función.
4. Sustituyendo algunos valores en la variable independiente, encontramos algunos puntos que nos ayudarán para trazar la gráfica.

Ejemplo:

Tenemos la función $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Factorizando al factor común $\frac{1}{2}$ de la expresión algebraica, obtenemos $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 8)$. Factorizando la expresión $x^2 + 2x - 8$, obtenemos la función $y = \frac{1}{2}(x - 2)(x + 4)$. Así, tenemos que los puntos $(2,0)$ y $(-4,0)$. Si ahora sustituimos $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$, obtenemos los puntos $(0, -4)$, $(-1, -\frac{9}{2})$ y $(1, -\frac{5}{2})$. Así, obtenemos la gráfica:

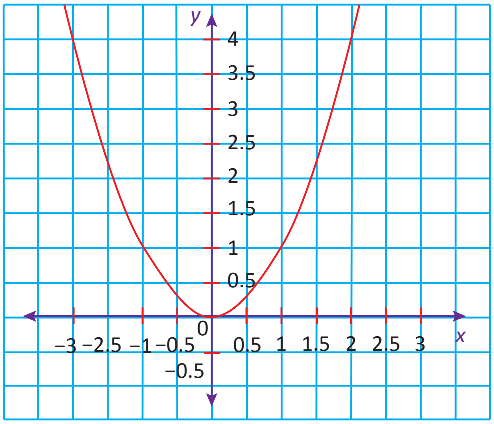


Los puntos donde la gráfica de la función cruza al eje x, los llamaremos las raíces de la función. Estos puntos los podemos encontrar resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Las soluciones de esta ecuación nos darán las primeras coordenadas de estos puntos. Como la gráfica cruza al eje x, la segunda coordenada de estos puntos será cero.

El punto donde la gráfica de una función cruza al eje y tendrá como primera coordenada al cero. Entonces si queremos encontrar la segunda coordenada de este punto, tendremos que hacer la sustitución $f(0)$.

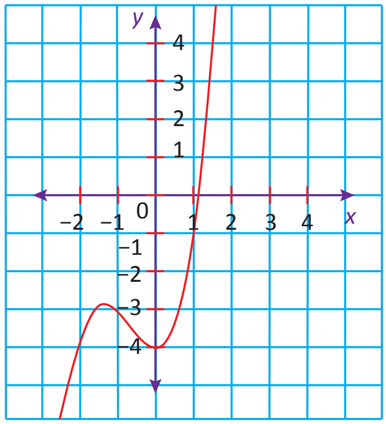
Las raíces y el punto que cruza con el eje y nos ayudarán para graficar funciones.
Ejemplos:

1.



Esta gráfica representa la función $y = x^2$

2.



Esta gráfica representa la función $y = x^3 + 2x^2 - 4$

Actividad de desarrollo

Comunicación

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- **Disciplinar:** 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ATRIBUTO

- Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.

1. De manera individual, realiza en tu cuaderno las gráficas de las siguientes funciones con ayuda de algunos puntos que cumplen la función.

1. $y = x + 2$
2. $y = -2x - 4$
3. $y = \dfrac{x}{2} + 4$
4. $y = \dfrac{5x}{4}$

2. En grupo, expongan en el pizarrón las gráficas explicando el procedimiento llevado a cabo en cada una.

Solución de ecuaciones por el método gráfico

La forma en que vamos a poder visualizar las soluciones de una ecuación es por medio de la gráfica de una función a la que le asociaremos a la ecuación. Cuando tengamos una ecuación, es de ayuda despejar la ecuación de forma que quede una expresión algebraica igualada a cero. Así, podremos ver qué función nos sirve asociarle.

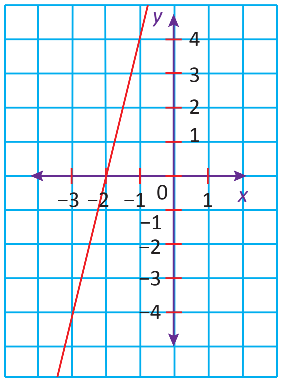
Lineales

Las funciones nos ayudan a resolver ecuaciones. Una función se llama lineal si es de la forma $y = ax + b$.

Si tenemos ahora una ecuación lineal de la forma $ax + b = 0$, podemos resolver esta ecuación graficando la función $y = ax + b$, y encontrando la raíz. Recordemos que la raíz la encontramos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Como en este caso $f(x) = ax + b$, obtenemos nuestra ecuación lineal: $ax + b = 0$.

Ejemplo:

Tenemos la ecuación $4x + 8 = 0$. Podemos escribir esto como una función lineal de la forma $y = 4x + 8$. Graficamos esta ecuación obteniendo:

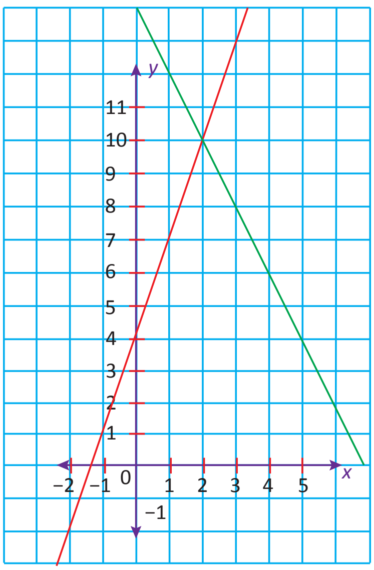


Glosario

Intersecan: dicho de dos líneas, dos superficies o dos sólidos; cortarse ocruzarse entre sí.

Aquí vemos que la gráfica **interseca** al eje x en el punto $(-2,0)$. Por lo tanto, la solución de esta ecuación es $x = -2$.

Lineales simultáneas con dos variables



En el caso de que tengamos dos ecuaciones de primer grado simultáneas, despejamos y en ambas. Así, las dos ecuaciones tienen forma de funciones lineales. Si graficamos estas dos funciones, encontraremos la solución de las ecuaciones simultáneas viendo en qué punto las dos gráficas se intersecan. Si el punto de intersección tiene las coordenadas (a,b), decimos que la solución de las ecuaciones lineales de dos variables es $x = a$ y $y = b$.

Ejemplo:

Si tenemos las ecuaciones simultáneas:

$-6x + 2y = 8$

$8x + 4y = 56$

Despejamos en ambas ecuaciones *a* y, obteniendo:

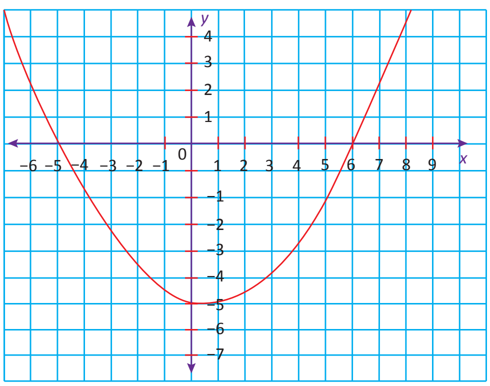
$y = 3x + 4$

$y = -2x + 14$

Graficamos ambas funciones y obtenemos (gráfica de la izquieda).

Aquí vemos que las dos gráficas se intersecan en el punto $(2,10)$. Esto quiere decir que la solución de las ecuaciones simultáneas es $x = 2$ y $y = 10$.

Cuadráticas



Hablamos de ecuaciones cuadráticas cuando la función tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$. Si ahora queremos resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, graficamos la función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y buscamos las raíces de la función, lo que es equivalente a ver donde la función cuadrática se interseca con el eje x.

Ejemplo:

Tenemos la ecuación cuadrática $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - 5 = 0$. Si graficamos esta ecuación, obtenemos (gráfica de la izquieda).

Aquí vemos que la gráfica tiene sus raíces en los puntos $(-5,0)$ y $(6,0)$. Entonces, concluimos que las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = -5$ y $x = 6$.

Actividad de desarrollo

Toleracia

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. • **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
ATRIBUTO	• Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

1. En equipo de tres integrantes, resuelvan, en papel milimétrico, las siguientes ecuaciones usando el método gráfico.

1. $x + 4 = 0$
2. $x - 3 = 0$
3. $3x + 3x + 6 = 0$
4. $8 - 3x = 0$
5. $\frac{5x}{4} = 0$
6. $x^2 + 1 = 0$
7. $x^2 - 4 = 0$
8. $x^2 + 4x + 3 = 0$
9. $x + 6y = 27$
10. $7x - 3y = 9$
11. $7x - 4y = 5$
12. $9x + 8y = 13$

2. Expongan en grupo sus gráficas y el proceso llevado a cabo para resolver cada ecuación.

Gráfica de funciones en la solución de problemas de situaciones reales

Estos métodos para resolver de forma gráfica las ecuaciones también nos sirven para resolver problemas de situaciones reales, simplemente encontrando la gráfica de la función asociada a las ecuaciones que queremos resolver.

Lineales

Aquí deberemos encontrar la ecuación lineal en el problema para poder graficar la función asociada a esta ecuación. Como la ecuación es lineal, habrá sólo una raíz. Así que graficando la función lineal asociada a la ecuación de forma que se vea la intersección con el eje x, podremos observar de forma sencilla cuál es la solución de la ecuación.

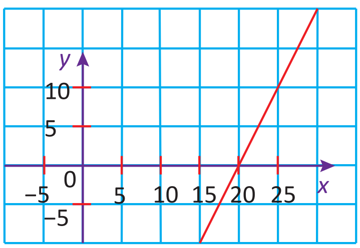
Ejemplo:

Si nos subimos a un taxi que tiene un costo inicial de 8 pesos y cuesta 2 pesos cada minuto, ¿en cuánto tiempo pagaremos 48 pesos?

Si tomamos: x = número de minutos, tener la ecuación: $2x + 8 = 48$.

Esta ecuación la escribimos como: $2x - 40 = 0$.

A esta ecuación le asociamos la función $y = 2x - 40$ y la gráfica de esta función se ve así:



En esta gráfica la raíz de esta función lineal es (20,0). Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = 20$. En otras palabras, después de 20 minutos pagaremos 48 pesos.

Simultáneas con dos variables

En este caso tenemos que encontrar las dos ecuaciones con dos variables en el problema. Recordemos que las dos ecuaciones serán representadas gráficamente con dos rectas en el sistema coordenado y que la solución del sistema de ecuaciones serán las coordenadas del punto de intersección de ambas ecuaciones lineales.

Ejemplo:

Si un día compré 4 naranjas y 6 manzanas y pagué 28 pesos y al día siguiente compré 3 naranjas y 9 manzanas y pagué 30 pesos, ¿cuánto cuesta una naranja y cuánto cuesta una manzana?

Aquí tomaremos:

x = costo de manzanas.

y = costo de naranjas.

Vemos que las ecuaciones lineales serán:

$4y + 6x = 28$

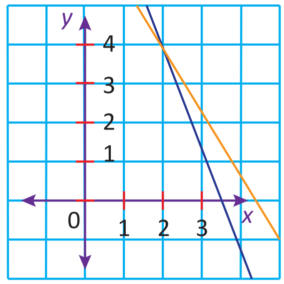
$3y + 9x = 30$

Despejando a y en las dos ecuaciones obtenemos:

$$y = -\frac{3}{2}x + 7$$

$$y = -3x + 10$$

Así la gráfica se verá como:



Aquí vemos que las dos funciones lineales se intersecan en al punto (2,4). Esto quiere decir que las manzanas cuestan 2 pesos y las naranjas 4 pesos.

Cuadráticas

Para resolver ecuaciones cuadráticas con el método gráfico, tenemos que encontrar la ecuación cuadrática que queremos resolver en el problema que se nos da, para así asociarle la función como lo hemos visto. Así podremos graficar la función y encontrar la solución (o las soluciones) de ésta.

Ejemplos:

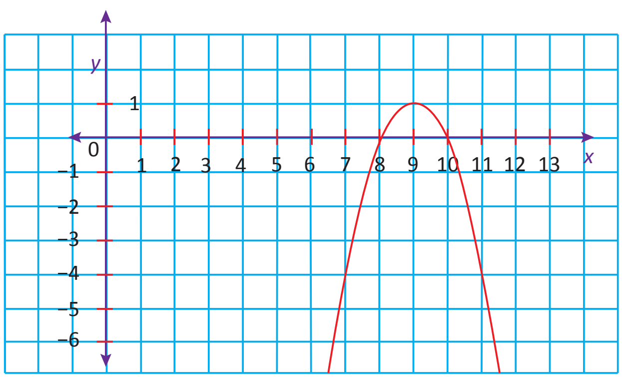
Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 centímetros y su área es 40 centímetros cuadrados. Halla los catetos de este triángulo.

Sea x la longitud de uno de los catetos. Entonces, el segundo cateto tendrá una longitud de $18 - x$ centímetros. El área de un triángulo rectángulo es la multiplicación de los catetos entre dos. Eso nos da la ecuación:

$$\frac{x(18-x)}{2} = 40$$

Simplificando esta ecuación, tenemos que: $-x^2 + 18x - 80 = 0$

Si graficamos la función $y = -x^2 + 18x - 80$ obtenemos:



Aquí vemos que las soluciones de la ecuación es $x = 8$ y $x = 10$ y que la longitud de los catetos tiene que ser 8 centímetros y 10 centímetros.

Actividad de cierre

Colaboración

VALORES

COMPETENCIAS

- **Genérica:** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- **Disciplinar:** 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

ATRIBUTO

- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

1. En equipo de tres integrantes, en papel milimétrico, para cada una de las funciones haga una tabla de valores, tracen la gráfica correspondiente y encuentren su dominio, contradominio, las raíces y el punto donde corta al eje Y.

1. $F(x) = 2x$
2. $F(x) = -2x$
3. $F(x) = 5x$
4. $F(x) = -5x$
5. $F(x) = -2x - 2$
6. $F(x) = 2x + 2$
7. $F(x) = 7x^2$
8. $F(x) = 3x + 5$
9. $F(x) = -7x^2$
10. $F(x) = \dfrac{5x}{2}$
11. $F(x) = 2x + 2$
12. $F(x) = -\,5x - 7$
13. $F(x) = 3x^2 + 2$
14. $F(x) = -5x^2 - 3$
15. $F(x) = -2x^2 - 1$

2. Resuelvan, en papel milimétrico, las siguientes ecuaciones simultáneas con el método gráfico.

1. $3x + 2y = 6$
   $6x + y = 4$
2. $-3x + 2y = 6$
   $6x - y = 4$
3. $3x + 4y = 6$
   $-4x + 2y = 4$
4. $-3x - 3y = 6$
   $-58 - 8y = -10$
5. $7x + 7y = 30$
   $-3x - y = 24$
6. $40x - 28y = 40$
   $20x + 44y = -100$

3. Expongan sus gráficas y resultados ante el grupo.

Recapitula lo que aprendiste en el “Resultado de aprendizaje 3.3” y prepárate para realizar la siguiente actividad de evaluación.

1. Escribe los datos que faltan para completar las definiciones.

   1. Una función es una expresión de la forma ______________, donde ______________ es la variable independiente y ______________ es la variable dependiente.
   2. Decimos que un par ordenado (a,b) cumple una función $y = f(x)$ si ______________.
   3. El conjunto de los valores que la variable independiente puede tomar se llama ______________.
   4. El conjunto de los valores que la variable dependiente puede alcanzar se llama ______________.
   5. Para encontrar las raíces de una función $y = f(x)$, tenemos que resolver la ecuación ______________.

Realiza tu evaluación parcial.

1. Para cada una de las funciones haz una tabla de valores, traza la gráfica correspondiente y encuentra su dominio, contradominio, las raíces y el punto donde corta al eje Y.
   a. $y = 5x + 1$

Tabla de valores

Procedimiento

b. $y = x^2 + 2x + 1$

Tabla de valores

Procedimiento

Gráfica

2. Resuelve las siguientes ecuaciones simultáneas con el método gráfico.

a. $x - y = 6$
$2x + 4y = -4$

Gráfica

b. $2x + 2y = 6$
$4x + 4y = -4$

Gráfica

Valor: 3 puntos

Actividad de evaluación 3.3.1

Rigor

VALORES

COMPETENCIAS	• **Genérica:** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • **Disciplinar:** 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
ATRIBUTO	• Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

TIC

EVALUACIÓN

RÚBRICA

1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno la serie de ejercicios propuesta en tres partes, modelando situaciones reales de la vida cotidiana con representaciones funciones y aplicando trazo de funciones, métodos de solución gráficos y métodos de solución gráfico.

Parte 1. Gráfica de funciones lineales

1. Grafica en tu cuaderno las siguientes funciones lineales. Con ayuda de la gráfica, da las coordenadas de su raíz y su intersección; con el eje *y* da la tabla de valores con mínimo 5 pares ordenados con los valores: x –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3.

   a. $y = 5x - 4$

   b. $y = -6x + 2$

   c. $y = \frac{3}{2}\ x - 3$

   • Verifica que los resultados estén correctos con ayuda de los métodos analíticos vistos en esta unidad.

2. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas usando el método gráfico.

   a. Si estoy a 600 metros de mi casa y avanzo 4 metros en un segundo, ¿en cuánto tiempo llego a casa?

   b. ¿Cuál es el número que multiplicado por dos es cuatro unidades menos que 3 veces 6?

Parte 2. Gráfica de ecuaciones simultáneas lineales

1. Grafica las siguientes ecuaciones simultáneas lineales. Con ayuda de las gráficas, da las coordenadas de su raíz y su intersección; con el eje *y* da la tabla de valores con un mínimo 5 pares ordenados para cada gráfica con los valores: x –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3.

   a. $3x - 2y = -2$

      $5x + 2y = -60$

   b. $9x + 16y = 7$

      $4y - 3x = 0$

   c. $7x + 9y = 42$

      $12x + 10y = -4$

   • Verifica que los resultados estén correctos con ayuda de los métodos analíticos vistos en esta unidad.

2. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas usando el método gráfico.

   a. En un corral se cuentan 88 patas y 30 cabezas. Si lo único que hay son gallinas y conejos, ¿cuál es el número de gallinas y el de conejos?

   a. En un examen un alumno gana dos puntos por cada respuesta correcta, pero pierde un punto por cada equivocación. Después de haber contestado 40 preguntas obtiene 56 puntos. ¿Cuántas correctas contestó?

Parte 3. Gráfica de funciones de segundo grado

1. Grafica en tu cuaderno las siguientes funciones cuadráticas. Con ayuda de la gráfica, da las coordenadas de sus raíces y su intersección, con el eje y da la tabla de valores con un mínimo de 7 pares ordenados, con los valores: x –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3.

   a. $x(x + 3) = 5x + 3$

   b. $3(3x - 2) = (x + 4)(4 - x)$

   c. $9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x - 3)(x + 2)$

   - Verifica que los resultados estén correctos con ayuda de los métodos analíticos vistos en esta unidad.

2. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas usando el método gráfico.

   a. En un rectángulo cuyo largo es 5 unidades más grande que el ancho, si el área del rectángulo es de 36 centímetros cuadrados, ¿cuantos centímetros mide el ancho?

   b. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. Halla dichos números.

2. Al finalizar, copia los ejercicios de las tres partes en un documento de *Word*, incluyendo la comprobación de los resultados obtenidos en los ejercicios y lo que se te solicitó en cada punto de las tres partes.

3. Revisa que la redacción de tu trabajo tenga orden, claridad, concisión y precisión, así como que la ortografía sea correcta.

4. Realiza una portada para tu trabajo con el nombre del módulo, tus datos y los de tu profesor, fecha y número de evaluación, junto con los datos de la serie de ejercicios.

5. Antes de entregar a tu profesor el documento de *Word*, realiza tu “Autoevaluación 3.3.1” que se encuentra al final de esta unidad en la sección “Instrumentos de evaluación”. Revisa si cumpliste con todos los indicadores de evaluación e identifica la calificación que estás en oportunidad de obtener. De ser necesario, mejora tu trabajo antes de entregarlo.

6. Una vez hecha la Autoevaluación, entrega tu trabajo en *Word* impreso a tu profesor. Cuida que las hojas tengan limpieza.

TIC

Una herramienta para checar tus gráficas es FooPlot, que es una aplicación graficadora en linea, chécala en el siguiente link:

http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

EVALUACIÓN **PLANEA**

Lee con atención los siguientes ejercicios, realiza las operaciones y rellena completamente el círculo que corresponda a la respuesta correcta.

1. Uno de los lados de un rectángulo es 3 cm más largo que el otro. El rectángulo tiene un área de 28 cm^2. ¿Cuál es el tamaño del lado más corto?

   a) 10

   b) 8

   c) 6

   d) 4

2. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación: $x^2 + x - 12 = 0$?

   a) $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$

   b) $x_1 = 3$ y $x_2 = -4$

   c) $x_1 = 2$ y $x_2 = 0$

   d) No tiene soluciones.

3. ¿Cuál es la solución de la ecuación: $3x^2 - x + 12 = 0$?

   a) Sólo una solución $x = \frac{1}{3}$

   b) No tiene solución real.

   c) $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$

   d) $x_1 = 3$ $x_2 = 5$

4. Selecciona los valores de x y y que resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones:

   $2x + 4y = 16$

   $3x - 4y = -6$

   a) $x = 2; y = 3$

   b) $x = 8; y = 0$

   c) $x = 10; y = 9$

   d) $x = 4; y = 2$

5. ¿Cuál es el dominio de la función $y = \frac{x^3 + 4}{x - 1}$?

   a) Los números reales sin el 1.

   b) Todos los números reales.

   c) Ningún número.

   d) Los números reales sin el –1.

6. ¿Cuál es el dominio de la función $y = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$?

   a) Todos los números reales.

   b) Los números reales sin el –2 ni el 3.

   c) Los números reales sin el –3 ni el 2.

   d) Los números reales sin el –6.

7. En la siguiente tabla de valores de la función $y = -4x + 10$, ¿cuál es el valor de a?

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	22	a	14	10	6	2	–2

   a) 18

   b) 23

   c) 7

   d) 10

8. ¿Qué par ordenado cumple la función $y = x^2 + 6x - 10$?

   a) (1,3)

   b) (1,–3)

   c) (2,3)

   d) (2,–4)

9. ¿Qué par ordenado cumple la función $y = -20x + 43$?

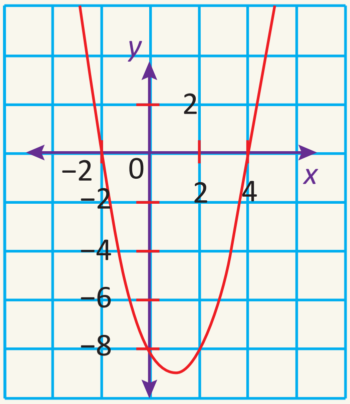
ⓐ (–10,243)

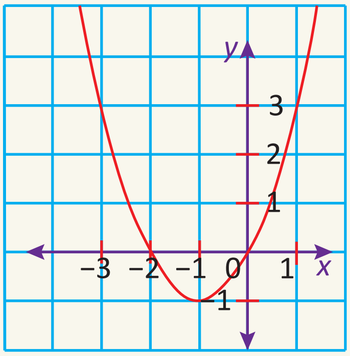
ⓑ (10,–156)

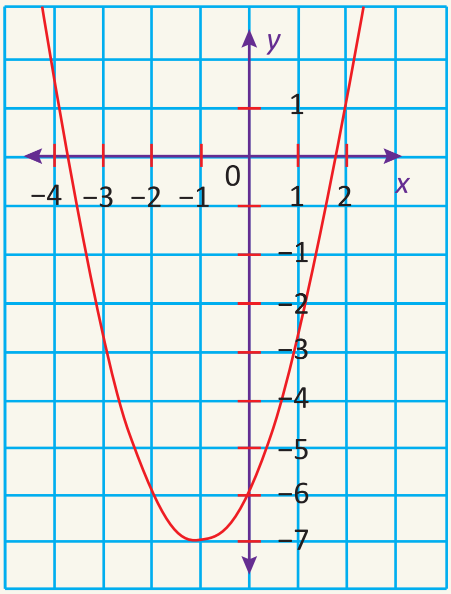
ⓒ (15,–243)

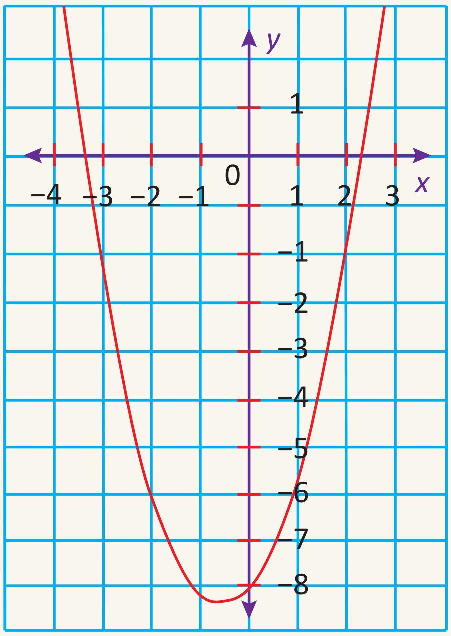
ⓓ (–15,156)

10. La gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 8$ es:

ⓐ


ⓑ


ⓒ


ⓓ


Autoevaluación

Evalúa los indicadores de aprendizaje de cada actividad de evaluación parcial para conocer la calificación que estás en posibilidad de obtener en la rúbrica según tu desempeño. Marca una ✔ en cada indicador logrado.

Para obtener Suficiente, deberás cubrir todos los indicadores del tono más claro, y para lograr Excelente, todos los indicadores de ambos tonos.

Suficiente   Excelente

Rúbrica 3.1.1		
Módulo: Manejo de espacios y cantidades.	**Grupo:**	
Nombre del alumno:	**Fecha:**	
Resultado de aprendizaje (RA): **3.1** Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con una, dos o tres incógnitas.	**Actividad de evaluación:** **3.1.1** Resuelve una serie de ejercicios propuesta, aplicando métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales con una dos o tres incógnitas.	
Porcentaje	✔	**Indicador logrado**
Ecuaciones de primer grado con una variable 30%		Resolví los 5 ejercicios y los 3 problemas propuestos.
		Apliqué ecuaciones de primer grado con una incógnita con signos de agrupación, y fraccionarias.
		Fundamenté mi respuesta en un ejercicio aplicando propiedades y postulados de la igualdad.
		Comprobé mi resultado obtenido.
		Representé con un dibujo o diagrama la solución de los problemas, colocando todos los datos y los valores dados para obtener la solución.
Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas 35%		Resolví los 3 ejercicios y el problema propuestos.
		Apliqué métodos de solución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas de primer grado, como lo son: sustitución, igualación y reducción.
		Planteé el sistema de ecuaciones que representa el problema.
		Realicé las operaciones necesarias para obtener la solución.
		Comprobé mis resultados.
		Representé con un dibujo o diagrama la solución de los problemas, colocando todos los datos y los valores dados para obtener la solución.
Sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas 35%		Resolví los 2 ejercicios y el problema propuestos.
		Apliqué métodos de solución de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas de primer grado, como lo son: sustitución y reducción.
		Planteé el sistema de ecuaciones que representa el problema.
		Realicé las operaciones necesarias para obtener la solución.
		Comprobé mis resultados.
		Representé con un dibujo o diagrama la solución de los problemas, colocando todos los datos y los valores dados para obtener la solución.
	100%	

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el RA 3.1 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Marca una ✔ en cada indicador logrado.

Rúbrica 3.2.1		
Módulo: Manejo de espacios y cantidades.	**Grupo:**	
Nombre del alumno:	**Fecha:**	
Resultado de aprendizaje (RA): **3.2** Resuelve problemas reales, mediante ecuaciones cuadráticas.	**Actividad de evaluación:** **3.2.1** Resuelve una serie de ejercicios propuesta, aplicando ecuaciones cuadráticas.	
Porcentaje	✔	**Indicador logrado**
Ecuación cuadráticas incompletas 40%		Resolví los 5 ejercicios y los 2 problemas, propuestos.
		Apliqué métodos de solución de ecuaciones cuadráticas incompletas.
		Planteé la relación que existe entre los datos y la incógnita del problema.
		Generé la ecuación que representa el problema.
		Resolví la ecuación por alguno de los métodos.
		Expresé la solución del problema.
		Comprobé los resultados obtenidos.
		Expliqué en qué momento la ecuación de segundo grado incompleta no tiene solución dentro de los números reales, mostrando un ejemplo.
Ecuación cuadráticas completas 40%		Resolví los 5 ejercicios y los 2 problemas, propuestos.
		Apliqué métodos de solución de ecuaciones cuadráticas completas.
		Planteé la relación que existe entre los datos y la incógnita del problema.
		Generé la ecuación que representa el problema.
		Resolví la ecuación por alguno de los métodos.
		Expresé la solución del problema.
		Comprobé los resultados obtenidos.
		Expliqué en qué momento la ecuación de segundo grado completa no tiene solución dentro de los números reales, mostrando un ejemplo.
Discriminante 20%		Resolví los 5 ejercicios propuestos.
		Describí la solución de la ecuación cuadrática por medio del discriminante.
		Contesté por medio de escrito, que tipo de solución: real, cero o imaginaria.
		Respondí: si el discriminante tiene un valor negativo, ¿cuál será su posible resultado?
	100%	

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el RA 3.2 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Marca una ✔ en cada indicador logrado.

Rúbrica 3.3.1		
Módulo: Manejo de espacios y cantidades.	**Grupo:**	
Nombre del alumno:	**Fecha:**	
Resultado de aprendizaje (RA): **3.3** Representa situaciones del entorno, empleando los conceptos de función.	**Actividad de evaluación:** **3.3.1** Modela situaciones de la vida cotidiana empleando representaciones funciones.	
Porcentaje	✔	**Indicador logrado**
Gráfica de funciones lineales 30%		Tracé la grafica de 5 funciones lineales.
		Identifiqué la intersección con los ejes coordenados.
		Resolví un problema.
		Realicé una tabla con mínimo 5 pares ordenados.
		Comprobé los resultados obtenidos por el método analítico.
Gráfica de ecuaciones simultáneas 40%		Resolví 4 ejercicios de sistema de ecuaciones con dos incógnitas por el método gráfico propuesto.
		Resolví un problema práctico en donde tuve que graficar.
		Realicé una tabla de valores con un mínimo 5 pares ordenados para cada gráfica.
		Comprobé los resultados obtenidos por el método analítico.
Grafica de funciones de segundo grado 20%		Tracé la grafica de 5 funciones cuadráticas propuestas.
		Identifiqué la intersección con los ejes coordenados.
		Identifiqué las coordenadas del vértice y el tipo de concavidad.
		Resolví un problema.
		Realicé una tabla de valores con un mínimo 7 pares ordenados para cada gráfica.
		Comprobé los resultados obtenidos por el método analítico.
	100%	

En caso de que no hayas alcanzado el nivel de “Suficiente”, o si deseas mejorar para lograr el “Excelente”, repasa los conceptos vistos en el RA 3.3 y platica con tu maestro para obtener una segunda oportunidad de valoración.

Heteroevaluación

De acuerdo con el desempeño de sus alumnos, anote el peso logrado en cada actividad realizada. Sume los porcentajes para obtener el peso para la unidad.

Tabla de ponderación								
Unidad	RA	Actividad de evaluación	Aspectos a evaluar			% Peso específico	% Peso logrado	% Peso acumulado
			C	P	A			
3. Manejo de ecuaciones de primer, segundo grado y funciones algebraicas.	**3.1** Resuelve problemas reales, mediante sistemas de ecuaciones lineales con una, dos o tres incógnitas.	**3.1.1**	▲	▲	▲	20		
	3.2 Resuelve problemas reales, mediante ecuaciones cuadráticas.	**3.2.1**	▲	▲	▲	15		
	3.2 Representa situaciones del entorno, empleando los conceptos de función.	**3.3.1**	▲	▲	▲	15		
% peso para la unidad 3						**50**		
Peso total del módulo						**100**		

Al término de la última unidad, sume el peso logrado en todas las unidades y obtenga el total del módulo.

Coevaluación

Trabaja con un compañero para que se evalúen mutuamente. Escribe los datos en de tu compañero en la tabla siguiente.

Evalúa las competencias genéricas de tu compañero, conforme los indicadores e la tabla colocando una "X" en la casilla correspondiente.

Nombre de mi compañero:				
Carrera:		**Nombre del módulo:**		
Semestre:		**Grupo:**		
Competencias genéricas	**Atributos**	**Con frecuencia**	**Algunas ocasiones**	**Nunca**
Piensa crítica y reflexivamente				
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.			
Piensa crítica y reflexivamente				
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.			
	Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.			
	Construye hipótesis, y diseña y aplica modelos para probar su validez.			
Aprende de forma autónoma				
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.			
Trabaja en forma colaborativa				
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.			
	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.			

Bibliografía

Libros

- Baldor, Aurelio, *Álgebra*, Publicaciones Cultural Códice América, México, 1997.
- Bravo Mojica, Alejandro y otros, *Álgebra superior, Las prensas de ciencias*, Temas de Matemáticas, México, 2012.
- Campos, *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemática y Estadística, Colombia,1984.
- Cárdenas, Humberto y otros, Álgebra superior, Trillas, México, 2007.
- Courant- Robins, *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, 1971.
- Eric Temple Bell, *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincare* (en español: *Los hombres de matemáticas: La vida y los logros de los grandes matemáticos de Zeno de Poincaré*), Simon y Schuster, Nueva York, 1986 (traducción y adaptación de Enrique Campos).
- Frank Díaz, *Los números toltecas: Introducción a las matemáticas vigesimales del México antiguo,* Kinames, 2008.
- *History of theory of numbers* , vol II, Diophantine Análisis.
- Jones, W. Burton, *Teoría de los números*, México,Trillas.
- Malba Tahan, *El hombre que calculaba*, Noriega, México, 1992.
- Mariano Mataix, *Historias de matemáticos y algunos problemas*, Boixareu Editores, 1986.
- Niven, I.; Zuckerman, *Introducción a la teoría de los números,* Limusa, Mexico, 1960.
- Perero, M., *Historia e Historias de Matemáticas*, Iberoamérica, 1994.

Bibliografía

Páginas web

- *Aplicaciones de las Funciones Cuadráticas*, <http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T1_text_final_es.html>, consulta: junio de 2016.
- *Aula Virtual do CPI San Sadurniño*, <http://www.edu.xunta.es/centros/cpisansadurnino/aulavirtual/>, consulta: junio de 2016.
- ^DiAmOnD^, "La muerte de Hipaso", 9 de agosto de 2010, en *Gaussianos*.com <http://gaussianos.com/la-raiz-de-la-muerte-de-hipaso/>, consulta: marzo de 2015.
- Ivorra, Carlos, *Lógica y teoría de conjuntos* <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf>, consulta: junio de 2016.
- *Math is fun*, <https://www.mathsisfun.com/data/function-grapher.php>, consulta: 30 de junio de 2016.
- *Math is fun*, <https://www.mathsisfun.com/quadratic-equation-solver.html>, consulta: 30 de junio de 2016.
- M*eta-calculator,* <http://www.meta-calculator.com/online/?home>, consulta: 30 de junio de 2016.
- *Simplificación de expresiones*, <http://ponce.inter.edu/cremc/expresiones.htm>, consulta: 30 de junio de 2016.